Hoggen

Anfangsgründe

der

algebraischen Analysis

nebst

Ergänzungen zur Arithmetik

für den

Schul- und Selbst-Unterricht

bearbeitet

von

Karl Koppe,
Professor.

Mit einer Figurentafel.

Essen,
Druck und Verlag von G. D. Bädeker.
1870.

Vorrede.

Das erste Kapitel dieses Buches enthält Ergänzungen zur Arithmetik. In dem ersten Abschnitte desselben ist gezeigt, wie schon die Lehren der gewöhnlichen Algebra ausreichen, um für eine Menge der wichtigsten und am ersten in Frage kommenden Aufgaben das Maximum oder Minimum zu bestimmen, ohne daß es hierzu einer besondern, den Begriff des Unendlichkleinen involvirenden Methode bedarf. Allerdings reicht das dargelegte Verfahren nicht für alle möglicher Weise zu stellenden Aufgaben aus. Ganz dasselbe gilt ja aber auch mehrfach von den Methoden, welche an andern Stellen der elementaren Mathematik vorgetragen werden. So werden z. B. in der niedern Algebra nur die Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzel, in der elementaren Trigonometrie die Berechnung der goniometrischen Functionen derjenigen Winkel gelehrt, welche sich durch rein geometrische Construction darstellen lassen; die Berechnung der Wurzeln mit beliebigen Exponenten und eben so der trigonometrischen Functionen beliebiger Winkel bleibt der Analysis vorbehalten. Bei der Ausmessung der krummlinigen Figuren und krummflächigen Körper beschränkt sich die elementare Geometrie auf den Kreis, die Kugel, den Cylinder und den Kegel; die alle krumme Linien und Flächen umfassenden Methoden werden erst in der höheren Analysis entwickelt. Dennoch gewährt jene beschränkte Belehrung im Schulunterrichte den reichhaltigsten Nutzen, da durch dieselbe die wichtigsten und am häufigsten vorkommenden Fälle erledigt werden.

Unter den Aufgaben, für welche das zur Bestimmung des Maximums und Minimums hier angegebene Verfahren nicht ausreicht, dürften nur wenige angetroffen werden, welche ein gleiches Interesse wie die nach demselben zu lösenden darbieten.

Indem durch dieses Verfahren überdies für alle Aufgaben, welche auf Gleichungen 2. oder 3. Grades, zum Theil auch für solche, welche auf Gleichungen noch höherer Grade führen, die Determination in höchst einfacher Weise gewonnen werden kann, ohne daß man nöthig hat, die Auflösungen auszuführen, welche sich schon bei den Gleichungen 3. Grades in sehr unbeholfener Form darstellen, für Gleichungen 4. Grades kaum noch und für Gleichungen noch höherer Grade überhaupt nicht mehr allgemein darstellbar sind, so bietet der erste Abschnitt des ersten Kapitels recht eigentlich eine Ergänzung der Arithmetik dar, welche auch noch

darum als besonders geeignet für die Aufnahme in den Unterricht erscheint, da die nach dem vorgetragenen Verfahren zu lösenden Aufgaben zu den interessantesten gehören, welche im mathematischen Schulunterrichte überhaupt behandelt werden können, während kaum 4 Lehrstunden erforderlich sein dürften, die Schüler mit diesem Verfahren vertraut zu machen.

Die Sätze des zweiten Abschnitts, welcher von den Faktoriellen, und die Sätze des dritten Abschnitts, welcher von den arithmetischen Reihen höherer Ordnung handelt, sind aus früheren Auflagen der von dem Verfasser herausgegebenen Arithmetik und Algebra in die vorliegende Schrift übertragen worden. Da die in dem zweiten Abschnitte behandelten Lehren, obschon sie besonderes theoretisches Interesse gewähren, verhältnißmäßig wenig Anwendung finden, auch die Kenntniß derselben für das richtige Verständniß der übrigen Lehren dieses Buches nicht erforderlich ist, so können dieselben, wenn die dem mathematischen Unterrichte beschränkt zugemessene Zeit oder andere Umstände dies wünschenswerth erscheinen lassen, ohne Störung des Zusammenhanges übergangen werden.

Die in dem zweiten Kapitel vorgetragenen Lehren sind von dem Verfasser schon früher in einer unter dem Titel „Niedere Analysis" herausgegebenen, aber längst vergriffenen Schrift behandelt worden. Von dieser früheren Bearbeitung unterscheidet sich die hier vorliegende besonders darin, daß die Exponentialreihe und die trigonometrischen Reihen ohne Hinzufügung des Beweises für die Möglichkeit der Reihenentwicklung abgeleitet worden sind. Wenn erst die neuere Zeit diesen Beweis nachgeliefert hat, während früherhin auch ohne denselben von den größten Mathematikern aller Völker jene Reihen als richtig angenommen und angewendet worden sind, so dürfte es wohl auch noch gegenwärtig für den Schulunterricht eben so wohl ausreichend als zweckentsprechend sein, die Schüler zunächst mit der Methode der Reihenentwicklung bekannt zu machen, die wissenschaftliche Begründung der Zulässigkeit derselben aber dem academischen Studium vorzubehalten.

Endlich wollen wir noch bemerken, daß die Lehren eines jeden der beiden Kapitel, welche das Buch zusammensetzen, unabhängig von dem andern vorgetragen sind, und daß daher das zweite Kapitel auch früher als das erste mit den Schülern durchgenommen werden kann, was für diejenigen Schulanstalten, in denen halbjährliche Versetzungen stattfinden und daher jedes Halbjahr neue Schüler in die Klasse eintreten, nicht unerwünscht sein dürfte.

Soest, im März 1870.

Der Verfasser.

Erstes Kapitel.

Ergänzungen zur Arithmetik.

Erster Abschnitt.

Von größten und kleinsten Werthen.

Bemerkung. In diesem Abschnitte werden die in den Formeln angewendeten Buchstaben, so fern nicht ausdrücklich das Gegentheil angezeigt ist, ausschließlich positive Zahlen bezeichnen.

§. 1. Lehrsatz.

Die folgenden Ausdrücke

1) $2mx - x^2$	4) $4m^3x - x^4$
2) $3m^2x - x^3$	5) $4m^2x^2 - 2x^4$
3) $3mx^2 - 2x^3$	6) $4mx^3 - 3x^4$

erhalten sämmtlich dann ihren (absolut) größten Werth, wenn man in denselben $x = m$ setzt.

Bew. 1) Der Ausdruck

$$2mx - x^2$$

wird $= m^2$, wenn wir in demselben $x = m$ setzen. Um nun zu zeigen, daß dies der größte Werth ist, welchen dieser Ausdruck überhaupt erhalten kann, addiren wir zu demselben $m^2 - m^2 = 0$ und bekommen so die Gleichung

$$2mx - x^2 = m^2 - (m^2 - 2mx + x^2) = m^2 - (m - x)^2.$$

Da der Subtrahend $(m - x)^2$ verschwindet, wenn $x = m$ gesetzt wird, für jede andere Annahme aber einen positiven Werth erhält, so wird der vorstehende Ausdruck offenbar dann am größten, wenn man $x = m$ annimmt.

2) Wenn man in dem Ausdrucke

$$3m^2x - x^3$$

$x = m$ annimmt, so wird derselbe $= 2m^3$. Um zu zeigen, daß dieser Werth der größte ist, welchen der obige Ausdruck erhalten kann, addiren wir zu demselben

$$2m^3 - 2m^3 = 0;$$

dann bekommen wir die Gleichung

$$3m^2x - x^3 = 2m^3 - (2m^3 - 3m^2x + x^3).$$

Wenn wir das eingeschlossene Glied $2m^3 - 3m^2x + x^3$ durch $(m - x)^2 = m^2 - 2mx + x^2$ dividiren, so erhalten wir zum Quotienten $2m + x$, ohne daß ein Rest bleibt; wir werden daher auch setzen können

$$3m^2x - x^3 = 2m^3 - (m - x)^2 (2m + x).$$

Das von $2m^3$ zu subtrahirende Glied verschwindet, wenn man $x = m$ annimmt; für jeden andern Werth von x wird dasselbe positiv. Der vorstehende Ausdruck wird daher am größten, wenn man in demselben $x = m$ setzt.

Behandeln wir die noch übrigen oben aufgeführten Ausdrücke in ganz gleicher Weise, indem wir zugleich berücksichtigen, daß dieselben für $x = m$ die Werthe

$$3)\ m^3 \qquad 4)\ 3m^4 \qquad 5)\ 2m^4 \qquad 6)\ m^4$$

erhalten, so ergeben sich uns folgende Gleichungen

$$\begin{aligned}
3)\ 3mx^2 - 2x^3 &= m^3 - (m^3 - 3mx^2 + 2x^3) \\
&= m^3 - (m - x)^2 (m + 2x). \\
4)\ 4m^3x - x^4 &= 3m^4 - (3m^4 - 4m^3x + x^4) \\
&= 3m^4 - (m - x)^2 (3m^2 + 2mx + x^2). \\
5)\ 4m^2x^2 - 2x^4 &= 2m^4 - (2m^4 - 4m^2x^2 + 2x^4) \\
&= 2m^4 - 2(m^2 - x^2)^2. \\
6)\ 4mx^3 - 3x^4 &= m^4 - (m^4 - 4mx^3 + 3x^4) \\
&= m^4 - (m - x)^2 (m^2 + 2mx + 3x^2).
\end{aligned}$$

Anm. 1. Da es für die spätere Anwendung der oben aufgeführten Ausdrücke (1) bis (6) angenehm ist, dieselben im Gedächtniß zu haben, so machen wir darauf aufmerksam, daß die Summe der Exponenten von m und x im ersten Gliede gleich ist dem Exponenten von x im zweiten Gliede, und daß der Coefficient des einen Gliedes allemal gleich ist dem Exponenten von x im andern Gliede.

Anm. 2. Die unter Nr. (1) bis (6) aufgeführten Ausdrücke sind spezielle Fälle des allgemeineren Ausdrucks

$$\text{I.}\quad (n + p)m^p x^n - n x^{n+p},$$

welcher ebenfalls seinen absolut größten Werth erhält, wenn man in demselben $x = m$ annimmt; vorausgesetzt ist hierbei, daß n und p ganze Zahlen vorstellen.

Um die folgende Entwicklung etwas zu kürzen, wollen wir zunächst $m = 1$ annehmen. Der obige Ausdruck vereinfacht sich dann in

$$(n + p)x^n - n x^{n+p},$$

und dieser Ausdruck wird am größten, nämlich $= p$, wenn man $x = 1$ setzt. Denn die Differenz

$$p - ((n + p)x^n - n x^{n+p})$$

läßt sich in ein Product zerfällen, welches zu dem einen Factor den Ausdruck

$$(1 - x)^2 = 1 - 2x + x^2$$

und zu dem andern Factor den folgenden Ausdruck hat

$$\begin{aligned}
p + 2px + 3px^2 \ldots\ldots + (n - 1)px^{n-2} + npx^{n-1} + n(p - 1)x^n \\
+ n(p - 2)x^{n+1} \ldots\ldots + n(p - (p - 1))x^{n+p-2},
\end{aligned}$$

wie man sich leicht überzeugt, wenn man diese beiden Factoren mit einander multiplicirt*). Bezeichnen wir daher den zuletzt aufgeführten Ausdruck der Kürze wegen mit F, so können wir die Gleichung aufstellen

$$p - ((n + p)x^n - n x^{n+p}) = (1 - x)^2 . F$$

oder

$$(n + p)x^n - n x^{n+p} = p - (1 - x)^2 . F.$$

Da der Ausdruck F nur positive Glieder enthält, also jedenfalls selbst positiv wird, welchen (positiven) Werth man auch immer x beilegen mag, so wird der zuletzt aufgeführte Ausdruck offenbar dann am größten, wenn man in demselben $x = 1$ setzt.

---

*) Ein in Ziffern ausgeführtes Beispiel, indem man statt n und p beliebige aber nicht zu kleine ganze Zahlen setzt, stellt die Sache am klarsten vor Augen.

Es erübrigt nun noch, auf diesen den zuerst aufgestellten Ausdruck

$$(n + p)m^p x^n - nx^{n+p}$$

zurückzuführen. Man setze in demselben

$$x = mz;$$

dann verwandelt sich derselbe in

$$m^{n+p}\left((n + p)z^n - nz^{n+p}\right),$$

und da dieser Ausdruck nach dem eben Erwiesenen seinen größten Werth erhält*), wenn man in demselben $z = 1$ annimmt, so wird folglich der obige Ausdruck am größten, wenn man $x = m$ setzt.

§. 2. Lehrsatz.

Die folgenden Ausdrücke

1) $\frac{m^2}{x} + x$	4) $\frac{m^4}{x^3} + 3x$
2) $\frac{m^3}{x^2} + 2x$	5) $\frac{2m^4}{x^2} + 2x^2$
3) $\frac{2m^3}{x} + x^2$	6) $\frac{3m^4}{x} + x^3$

erhalten sämmtlich ihren kleinsten Werth, wenn man in denselben $x = m$ setzt.

Bew. 1) Wie leicht zu sehen, ist

$$\frac{m^2}{x} + x = \frac{m^2 + x^2}{x} = 2m + \frac{(m - x)^2}{x},$$

und dieser Ausdruck wird offenbar am kleinsten, wenn das zweite, unter allen Umständen positive Glied verschwindet, also wenn $x = m$ ist.

Eben so findet man leicht

$$2)\quad \frac{m^3}{x^2} + 2x = \frac{m^3 + 2x^3}{x^2} = 3m + \frac{m^3 - (3mx^2 - 2x^3)}{x}.$$

Nach Nr. 3 des vorherg. §. wird, wenn man $x = m$ setzt, der Ausdruck $3mx^2 - 2x^3$ am größten, nämlich $= m^3$, folglich der vorstehende Ausdruck für diese Annahme am kleinsten, indem dann das zu $3m$ zu addirende Glied verschwindet.

$$3)\quad \frac{2m^3}{x} + x^2 = \frac{2m^3 + x^3}{x} = 3m^2 + \frac{2m^3 - (3m^2x - x^3)}{x}.$$

Nach Nr. 2 des vorherg. §. wird für $x = m$ der Ausdruck $3m^2x - x^3$ am größten, nämlich $= 2m^3$, folglich der vorstehende Ausdruck dann am kleinsten.

In ganz ähnlicher Art können die Beweise für die unter Nr. 4 bis 6 aufgeführten Ausdrücke erhalten werden**).

Anm. 1. Man wird leicht bemerken, daß in den oben aufgeführten Ausdrücken (1) bis (6) der Exponent von m gleich ist der Summe der Exponenten von x in beiden Gliedern, und daß der Coefficient des einen Gliedes allemal gleich ist dem Exponenten von x im andern Gliede.

---

*) Vergl. unter §. 3.

**) Wir können hier die Beweise für diese Nummern um so eher übergehen, da wir von denselben (mit Ausnahme von Nr. 5, wofür der Beweis jedoch schon in Nr. 1 enthalten ist) in den weiterhin aufzuführenden Aufgaben keinen Gebrauch machen werden.

Anm. 2. Die obigen Ausdrücke sind specielle Fälle des folgenden allgemeinern Ausdrucks

$$\text{II.}\quad \frac{p \,.\, m^{n+p}}{x^n} + n \,.\, x^p,$$

und dieser Ausdruck ist $= \frac{p \,.\, m^{n+p} + n \,.\, x^{n+p}}{x^n}$

$$= (n+p)m^p + \frac{p \,.\, m^{n+p} - ((n+p)m^p x^n - nx^{n+p})}{x^n}.$$

Nach der Anm. 2 zum vorherg. §. wird der Ausdruck

$$\text{I.}\quad (n+p)m^p x^n - nx^{n+p}$$

am größten, nämlich $= p \,.\, m^{n+p}$, wenn man $x = m$ setzt; folglich erhält dann der ganze obige Ausdruck seinen kleinsten Werth, indem sich derselbe auf das erste Glied $(n+p)m^p$ reducirt, während das andere Glied, welches für jeden von m verschiedenen Werth des x positiv wird, für $x = m$ verschwindet.

Endlich mag nicht unerwähnt bleiben, daß der Ausdruck (I.) in (II.) übergeht, wenn man in demselben statt der Summe $n + p$ die einfache Zahl p und statt der positiven Zahl $+ n$ die negative $- n$ setzt.

§. 3. Zusatz.

Wenn ein x enthaltender Ausdruck für einen gewissen Werth von x am größten oder kleinsten wird, so gilt dies auch von jedem Ausdrucke, welcher aus dem gegebenen Ausdrucke hervorgeht, indem man zu demselben einen von x unabhängigen Ausdruck addirt, von demselben subtrahirt, ihn damit multiplicirt oder dividirt, oder wenn man den gegebenen Ausdruck in irgend eine Potenz erhebt oder aus demselben irgend eine Wurzel zieht.

Die Beweise für diese Behauptungen sind in den §§. 123, 125, 128, 130, 209 und 225, a. der Arithmetik und Algebra enthalten.

Anm. 1. Zur Verdeutlichung des eben Gesagten mag folgendes Beispiel dienen: Wir haben oben in §. 2 gesehen, daß der Ausdruck

$$3mx^2 - 2x^3$$

am größten wird, wenn man $x = m$ annimmt; es müssen daher offenbar auch folgende Ausdrücke

$$3mx^2 - 2x^3 + a \qquad\qquad 3mx^2 - 2x^3 - a$$

$$a(3mx^2 - 2x^3) \qquad\qquad \frac{3mx^2 - 2x^3}{a}$$

$$(3mx^2 - 2x^3)^2 \qquad\qquad \sqrt[3]{(3mx^2 - 2x^3)}$$

dann am größten werden, wenn man in denselben $x = m$ setzt.

Anm. 2. Als Anwendungen der vorhergehenden allgemeinen Sätze führen wir die folgenden Aufgaben an, in deren Auflösungen wir diejenigen Werthe von x, y, z..., für welche ein in Frage stehender Ausdruck seinen größten oder kleinsten Werth erhält, mit x', y', z'..., bezeichnen werden.

I. Aufgaben aus der Planimetrie.

Aufgabe 1. Von einem Rechteck ist der Umfang $= 2p$ gegeben; wie müssen die Seiten desselben x und y angenommen werden, damit das Rechteck den größten Inhalt erhalte?

Aufl. Aus der Aufgabe ergeben sich uns die Gleichungen

$$2x + 2y = 2p \text{ und } xy = \text{Maximum},$$

also wenn wir y eliminiren,

$$px - x^2 = \text{Maximum}.$$

Wir haben in §. 1 gesehen, daß der Ausdruck

$$2mx - x^2$$

seinen größten Werth erhält, wenn wir $x = m$ setzen. Der hier zu behandelnde Ausdruck geht aber in diesen letztern über, wenn wir $p = 2m$, also $m = \frac{1}{2}p$ annehmen; wir erhalten folglich

$$x' = m = \tfrac{1}{2}p, \text{ also auch } y' = \tfrac{1}{2}p.$$

Von allen Rechtecken mit gleichem Umfange hat also das Quadrat den größten Inhalt*).

Aufgabe 2. Von einem Dreiecke ist die Grundlinie $= a$ und die Summe der Seiten $x + y = s$ gegeben; wie müssen diese angenommen werden, damit der Inhalt des Dreiecks am größten wird?

Aufl. Wenn wir den Umfang des Dreiecks $a + x + y = 2p$ setzen, so erhalten wir die Gleichung

$$\sqrt{p(p-a)(p-x)(p-y)} = \text{Maximum}^{**}),$$

wofür wir auch vermöge §. 3

$$(p - x)(p - y) = \text{Maximum}$$

setzen können. Nach unserer Annahme ist

$$x + y = s, \text{ also } y = s - x$$

und

$$p = \frac{a + s}{2}.$$

Setzen wir diese Werthe in die zuletzt erhaltene Gleichung ein, so verwandelt sich dieselbe in

$$\frac{a^2 - s^2}{4} + sx - x^2 = \text{Maximum}$$

oder zufolge §. 3

$$sx - x^2 = \text{Maximum}.$$

Stellen wir diese Gleichung mit der Gleichung

$$2mx - x^2 = \text{Maximum}$$

zusammen, so ergibt sich $m = \frac{1}{2}s$, also auch

$$x' = \tfrac{1}{2}s \text{ und folglich auch } y' = \tfrac{1}{2}s.$$

Von allen über der nämlichen Grundlinie mit gleicher Seitensumme zu construirenden Dreiecken hat folglich das gleichschenklige den größten Inhalt.

Es folgt aber hieraus leicht weiter, daß von allen Dreiecken mit gegebenem Umfange das gleichseitige den größten Inhalt hat. — Denn vermöge des eben Erwiesenen muß das Dreieck vom größten Inhalte nothwendig gleichschenklig sein; wenn wir uns dem gemäß ein gleichschenkliges Dreieck ABC gezeichnet denken, in

*) Umgekehrt folgt hieraus, daß von allen Rechtecken mit gleichem Inhalte das Quadrat den kleinsten Umfang hat. Die directe Auflösung dieser Aufgabe führt auf die Gleichung

$$x + \frac{a^2}{x} = \text{Minimum},$$

aus welcher sich nach §. 2 Nr. 1 $x' = a$ ergibt.

**) Anfangsgründe der Trigonometrie §. 73, b.

welchem AB die Grundlinie und AC und BC die gleichen Seiten sind, wenn wir ferner noch über BC als Grundlinie ein gleichschenkliges Dreieck BCD zeichnen, in welchem $BD + CD = AB + AC$ ist, so hat das Dreieck BCD mit dem Dreiecke ABC gleichen Umfang, aber nach dem oben Erwiesenen einen größeren Inhalt. Es kann daher das Dreieck ABC, wenn es nicht gleichseitig ist, auch nicht das Dreieck vom größten Inhalte bei gegebenem Umfange sein.

Aufgabe 3. In einen Kreis das Rechteck vom größten Inhalte zu zeichnen.

Aufl. Bezeichnen wir den Radius des Kreises mit r, die Seiten des Rechtecks mit x und y, so erhalten wir die Gleichungen

$$x^2 + y^2 = 4r^2 \text{ und } xy = \text{Maximum}.$$

Eliminiren wir zwischen derselben y, so erhalten wir weiter

$$x\sqrt{4r^2 - x^2} = \text{Maximum},$$

wofür wir nach §. 3 auch $4r^2x^2 - x^4 = \text{Maximum}$

setzen können. Multipliciren wir die linke Seite dieser Gleichung, um sie der Gleichung

$$4m^2x^2 - 2x^4 = \text{Maximum}$$

conform zu machen, mit 2, so verwandelt sich dieselbe in

$$8r^2x^2 - 2x^4 = \text{Maximum}.$$

Wir erhalten dann aus der Zusammenstellung dieser beiden Gleichungen

$$m^2 = 2r^2, \text{ folglich } m = r\sqrt{2},$$

also auch $x' = r\sqrt{2} = y'$.

Das Quadrat hat also von allen in einen Kreis zu zeichnenden Rechtecken den größten Inhalt.

Aufgabe 4. In einen Kreis das Rechteck vom größten Umfange zu zeichnen.

Aufl. Wir erhalten leicht die Gleichung

$$x + \sqrt{4r^2 - x^2} = \text{Maximum}.$$

Quadriren wir die linke Seite, so ergibt sich weiter

$$4r^2 + 2x\sqrt{4r^2 - x^2} = \text{Maximum},$$

wofür wir auch $x\sqrt{4r^2 - x^2} = \text{Maximum}$

setzen können. Quadriren wir nochmals, so bekommen wir die nämliche Gleichung wie bei der vorhergehenden Aufgabe

$$4r^2x^2 - x^4 = \text{Maximum}.$$

Das Quadrat hat also auch von allen in einen Kreis zu zeichnenden Rechtecken den größten Umfang.

Aufgabe 5. In einen Kreis das größte Dreieck so zu zeichnen, daß die Grundlinie eine Sehne wird, die Spitze aber in den Mittelpunkt des Kreises fällt.

Aufl. Bezeichnen wir den Radius des Kreises mit r, die Grundlinie des gesuchten Dreiecks mit x', so findet man leicht

$$x' = r\sqrt{2}.$$

Aufgabe 6. In einen Halbkreis das größte Trapez zu zeichnen.

Aufl. Bezeichnen wir den Durchmesser AB, Fig. 1, mit 2r, die ihm parallele Seite DE mit 2y und die Höhe des Trapezes CF mit x, so ergibt sich uns zunächst aus der Aufgabe die Gleichung

$$\frac{(r + y)x}{2} = \text{Maximum},$$

und wenn wir noch CE ziehen, so erhalten wir weiter

$$x = \sqrt{r^2 - y^2},$$

also

$$\frac{(r + y)\sqrt{r^2 - y^2}}{2} = \text{Maximum},$$

wofür wir auch, wenn wir die linke Seite mit 2 multipliciren und dann quadriren, schreiben können

$$(r + y)^3 . (r - y) = \text{Maximum}.$$

Setzen wir $r + y = z$, also $y = z - r$, so verwandelt sich die vorstehende Gleichung in

$$2rz^3 - z^4 = \text{Maximum},$$

oder wenn wir die linke Seite mit 3 multipliciren*)

$$6rz^3 - 3z^4 = \text{Maximum}.$$

Stellen wir nun diese Gleichung mit der Gleichung (6) des §. 1

$$4mz^3 - 3z^4 = \text{Maximum}$$

zusammen, so erhalten wir $4m = 6r$,

also $z' = m = \frac{3}{2}r$ und daher $y' = z' - r = \frac{1}{2}r$.

Die Seite DE ist folglich dem Radius gleich, also Bogen DE $= 60^0$ und folglich auch Bogen AD und BE $= 60^0$. Das größte in den Halbkreis zu zeichnende Trapez ist demnach die Hälfte eines regelmäßigen Sechsecks.

Aufgabe 7. In ein Dreieck ABC, Fig. 2, das größte Rechteck DEFG so zu zeichnen, daß zwei Ecken in die Grundlinie AB, die beiden andern in die Seiten AC und BC fallen.

Aufl. Wenn wir die Seiten DE = FG = x und DG = EF = y setzen, so haben wir zunächst aus der Aufgabe die Gleichung

$$xy = \text{Maximum}.$$

Bezeichnen wir ferner die Grundlinie AB mit g, die Höhe CH mit h, so ergibt sich uns leicht, da FG || AB ist, die Proportion**)

$$g : x = h : h - y,$$

also

$$x = \frac{g(h - y)}{h}.$$

Setzen wir diesen Werth in die zuerst aufgeführte Gleichung, so verwandelt sich dieselbe in

$$\frac{g(h - y)y}{h} = \text{Maximum},$$

oder

$$hy - y^2 = \text{Maximum}.$$

Stellen wir dieselbe mit der Gleichung (1) des §. 1

$$2my - y^2 = \text{Maximum}$$

zusammen, so ergibt sich

$$y' = m = \tfrac{1}{2}h \text{ und folglich } x' = \tfrac{1}{2}g.$$

Die Seiten des größten in das Dreieck zu zeichnenden Rechtecks sind also gleich der halben Höhe und der halben Grundlinie des Dreiecks.

Aufgabe 8. In ein Parallelogramm ein anderes so zeichnen, daß die Seiten desselben den Diagonalen des gegebenen Parallelogramms parallel laufen und das gesuchte Parallelogramm den möglich größten Inhalt erhält.

---

*) Bei sämmtlichen in §. 1 behandelten Ausdrücken ist der Coefficient des zweiten Gliedes gleich dem Exponenten von x im ersten Gliede.

**) Planimetrie §. 196.

Aufl. Durch eine der in der vorhergehenden Aufgabe ausgeführten ganz ähnliche Entwicklung findet man, daß die Ecken des einzuzeichnenden Parallelogramms in die Mitten der Seiten des gegebenen Parallelogramms fallen.

Aufgabe 9. Von einer Winkelfläche durch eine Linie BC, Fig. 3, welche durch eine zwischen den Schenkeln gegebenen Punkt P geht, das kleinste Dreieck abzuschneiden.

Aufl. Wenn wir Winkel CAB $= \alpha$, AB $=$ x, AC $=$ y setzen, so ergibt sich aus der Aufgabe die Gleichung

$$\tfrac{1}{2}xy \sin \alpha = \text{Minimum}.$$

Ziehen wir noch PD $\parallel$ AC und PE $\parallel$ AB, und setzen wir, da der Punkt P gegeben ist, also auch die Seiten des Parallelogramms ADPE bekannt sind, AD $=$ a, AE $=$ b, so erhalten wir leicht, da $\triangle$ ABC $\sim$ DBP ist, die Proportion

$$x : y = x - a : b,$$

also

$$y = \frac{bx}{x - a}.$$

Setzen wir diesen Werth in die obige Gleichung ein, so verwandelt sich dieselbe in

$$\frac{bx^2 \sin \alpha}{2(x - a)} = \text{Minimum},$$

also

$$\frac{x^2}{x - a} = \text{Minimum},$$

oder wenn wir $x - a = z$, folglich $x = a + z$ setzen,

$$\frac{a^2 + 2az + z^2}{z} = \text{Minimum},$$

wofür wir nach §. 3 auch

$$\frac{a^2}{z} + z = \text{Minimum}$$

schreiben können. Stellen wir diese Gleichung mit der Gleichung (1) des §. 2

$$\frac{m^2}{z} + z = \text{Minimum}$$

zusammen, so ergibt sich

$$z' = m = a, \text{ folglich } x' = 2a \text{ und } y' = 2b.$$

Die den gegebenen Winkel einschließenden Seiten des kleinsten von der Winkelfläche vermittelst einer durch P gehenden Linie abzuschneidenden Dreiecks sind daher doppelt so groß, als die Seiten des Parallelogramms ADPE, und folglich ist auch das kleinste Dreieck selbst doppelt so groß, als dieses Parallelogramm. Die dem gegebenen Winkel gegenüberliegende Seite BC dieses Dreiecks ABC wird in dem gegebenen Punkte P halbirt.

Aufgabe 10. In einen Kreis das größte gleichschenklige Dreieck zu zeichnen.

Aufl. Bezeichnen wir den Radius des Kreises mit r, die Höhe des gleichschenkligen Dreiecks mit x, die halbe Grundlinie desselben mit y, so verhält sich

$$x : y = y : 2r - x,$$

folglich ist

$$y = \sqrt{2rx - x^2}.$$

Hiernach erhalten wir aus der Aufgabe die Gleichung

$$x\sqrt{2rx - x^2} = \text{Maximum},$$

also auch

$$2rx^3 - x^4 = \text{Maximum}$$

oder

$$6rx^3 - 3x^4 = \text{Maximum}.$$

Stellen wir diese Gleichung mit der Gleichung

$$4mx^3 - 3x^4 = \text{Maximum}$$

zusammen, so ergibt sich

$$4m = 6r, \text{ also } x' = m = \tfrac{3}{2}r.$$

Demnach ist der Abstand des Mittelpunktes von der Grundlinie $= \frac{1}{2}r$ und daher, wie leicht aus geometrischen Gründen hervorgeht, das gesuchte Dreieck gleichseitig.

Da nun von allen Dreiecken, welche man in einen Kreisabschnitt so zeichnet, daß sie die Sehne zur gemeinschaftlichen Grundlinie haben und ihre Spitzen in den Bogen des Abschnitts fallen, wie äußerst leicht zu zeigen, das gleichschenklige den größten Inhalt hat, so ist überhaupt das gleichseitige von allen in einen Kreis zu zeichnenden Dreiecken das größte.

Aufgabe 11. In einen Kreis dasjenige gleichschenklige Dreieck zu zeichnen, welches den größten Umfang hat.

Aufl. Wenn wir den Radius des Kreises mit r, die Seite des gleichschenkligen Dreiecks mit x, die halbe Grundlinie mit y und die Höhe mit z bezeichnen, so gelangen wir leicht zu folgenden Gleichungen

$$x + y = \text{Maximum},$$

$$y^2 = x^2 - z^2 \text{ und } z = \frac{x^2}{2r}.$$

Eliminiren wir zwischen denselben y und z, so bekommen wir weiter

$$x + \sqrt{x^2 - \frac{x^4}{4r^2}} = \text{Maximum},$$

wofür wir auch, wenn wir die linke Seite mit 2r multipliciren, schreiben können

$$x(2r + \sqrt{4r^2 - x^2}) = \text{Maximum}.$$

Setzen wir nun, um diesen Ausdruck zu vereinfachen,

$$2r + \sqrt{4r^2 - x^2} = u, \text{ also } x = \sqrt{4ru - u^2}$$

so verwandelt sich die vorhergehende Gleichung in

$$u\sqrt{4ru - u^2} = \text{Maximum},$$

oder wenn wir die linke Seite quadriren und wegen der Vergleichung mit Nr. 6 in §. 1 mit 3 multipliciren, $12ru^3 - 3u^4 = \text{Maximum}.$

Stellen wir nun diese Gleichung mit der Gleichung

$$4mu^3 - 3u^4 = \text{Maximum}$$

zusammen, so ergibt sich $u' = m = 3r$, also $x' = r\sqrt{3}$

und folglich $y' = \frac{1}{2}r\sqrt{3} = \frac{1}{2}x'.$

Das in den Kreis zu zeichnende gleichschenklige Dreieck vom größten Umfange ist also ebenfalls das gleichseitige.

Weiter läßt sich auch noch leicht zeigen, daß, wenn in einen Kreisabschnitt mehrere Dreiecke gezeichnet werden, welche die Sehne zur gemeinschaftlichen Grundlinie haben, und deren Spitzen auf dem Bogen des Abschnittes liegen, das gleichschenklige die größte Seitensumme, also auch den größten Umfang hat. Denn wenn wir die Sehne mit a, den Peripheriewinkel des Abschnitts mit α und die Seiten mit x und y bezeichnen, so liefert uns die Trigonometrie die Gleichung

$$a^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\alpha = (x+y)^2 \sin\tfrac{1}{2}\alpha^2 + (x-y)^2 \cos\tfrac{1}{2}\alpha^2,$$

woraus

$$x + y = \frac{\sqrt{a^2 - (x-y)^2 \cos\frac{1}{2}\alpha^2}}{\sin\frac{1}{2}\alpha}$$

hervorgeht. Die Seitensumme $x + y$ wird folglich am größten, wenn die Seitendifferenz $x - y$ verschwindet, also das Dreieck gleichschenklig ist.

Da wir nun schon gesehen haben, daß unter den in den Kreis zu zeichnenden gleichschenkligen Dreiecken das gleichseitige den größten Umfang hat, so folgt hieraus, daß überhaupt von allen in den nämlichen Kreis zu zeichnenden Dreiecken das gleichseitige den größten Umfang hat.

Aufgabe 12. Von einem Dreiecke ist der Radius des eingeschriebenen Kreises $= \rho$ und die Grundlinie $AB = c$ gegeben; welches Verhältniß muß zwischen den Seiten AC und BC stattfinden, damit die Summe derselben am kleinsten wird? (Fig. 4.)

Aufl. Wenn wir die Winkel des Dreiecks ABC mit α, β, γ bezeichnen, so erhalten wir leicht die Gleichungen

$$1)\quad c = \rho \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\alpha + \rho \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\beta,$$

$$2)\quad AC = \rho \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\alpha + \rho \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\gamma,$$

und

$$3)\quad BC = \rho \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\beta + \rho \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\gamma,$$

folglich

$$4)\quad AC + BC = c + 2\rho \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\gamma.$$

Da

$$\tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{1}{2}\beta + \tfrac{1}{2}\gamma = 90^0$$

ist, so ist

$$\operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\gamma = \operatorname{tang}(\tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{1}{2}\beta) = 1 : \operatorname{cotg}(\tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{1}{2}\beta)$$

$$= \frac{\operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\alpha + \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\beta}{\operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\alpha \,.\, \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\beta - 1}.$$

Setzen wir diesen Werth in die Gleichung (4) ein, so erhalten wir

$$5)\quad AC + BC = c + \frac{2c}{\operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\alpha \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\beta - 1}.$$

Die Seitensumme $AC + BC$ wird folglich dann am kleinsten, wenn das Product $\operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\alpha \,.\, \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\beta$ am größten ist. Wir haben daher unsere Aufgabe auf die folgende

$$6)\quad \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\alpha \,.\, \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\beta = \text{Maximum}$$

zurückgeführt. Setzen wir in den Gleichungen (1) und (6)

$$\operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\alpha = x \text{ und } \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\beta = y,$$

so verwandeln sich dieselben in

$$7)\quad c = \rho x + \rho y$$

und

$$8)\quad xy = \text{Maximum},$$

woraus sich leicht

$$x' = \frac{c}{2\rho} = y'$$

ergibt. Von allen mit gleicher Grundlinie um den gegebenen Kreis zu zeichnenden Dreiecken hat also das gleichschenklige die kleinste Seitensumme, und wie hieraus leicht weiter hervorgeht*), von allen um einen gegebenen Kreis überhaupt zu zeichnenden Dreiecken hat das gleichseitige den kleinsten Umfang.

Da der Inhalt des um einen Kreis gezeichneten Dreiecks gleich ist dem halben Producte aus dem Radius des Kreises und dem Umfange des Dreiecks, so hat folglich auch das gleichseitige Dreieck von allen um einen Kreis zu zeichnenden Dreiecken den kleinsten Inhalt.

Aufgabe 13. Welches von allen Dreiecken, welche dieselbe Grundlinie (2g) und das nämliche Verhältniß der Seiten (m : n) haben, hat den größten Inhalt?

Aufl. Wenn wir die größere Seite mit x, die kleinere mit y, die Höhe mit z und den Unterschied der Segmente, in welche dieselbe die Grundlinie theilt, mit 2u bezeichnen, so erhalten wir zunächst folgende Gleichungen

$$x^2 = z^2 + (g + u)^2 \text{ und } y^2 = z^2 + (g - u)^2,$$

*) Vergl. die Aufgabe 2.

und dann weiter, da sich $x:y = m:n$ verhalten soll,

$$n^2z^2 + n^2(g+u)^2 = m^2z^2 + m^2(g-u)^2,$$

folglich $$z^2 = \frac{2gu(m^2+n^2)}{m^2-n^2} - u^2 - g^2.$$

Da nun von allen über derselben Grundlinie gezeichneten Dreiecken offenbar dasjenige das größte ist, welches die größte Höhe hat, so ergibt sich aus der Aufgabe die Gleichung

$$\frac{2g(m^2+n^2)u}{m^2-n^2} - u^2 = \text{Maximum},$$

woraus zunächst hervorgeht $$u' = \frac{g(m^2+n^2)}{m^2-n^2}$$

und dann weiter $$z' = \frac{2gmn}{m^2-n^2}.$$

Zufolge der Planimetrie (§. 253*) ist dieser Ausdruck gleich dem Radius des Kreises, auf welchem die Spitzen der über der nämlichen Grundlinie (2g) gezeichneten Dreiecke liegen, deren Seiten in einem vorgeschriebenen Verhältnisse (m : n) stehen. Von diesen Dreiecken hat also dasjenige den größten Inhalt, dessen Höhe diesem Radius gleich ist, eine Behauptung, deren Richtigkeit auch leicht aus geometrischen Gründen erkannt wird.

Aufgabe 14. Wie groß sind der Radius und der Centriwinkel eines Kreisausschnitts, welcher bei gegebenem Umfange den größten Inhalt hat?

Aufl. Bezeichnen wir den gegebenen Umfang des Ausschnitts mit 2p, den Radius mit x und den Bogen mit y, so erhalten wir die Gleichungen

$$2x + y = 2p \text{ und } \tfrac{1}{2}xy = \text{Maximum}$$

und hieraus $$x' = \tfrac{1}{2}p, \text{ also } 2x' = p = y'.$$

Bei dem gesuchten Ausschnitte ist folglich der Bogen gleich der Summe der beiden Radien, also gleich dem Durchmesser. Der Centriwinkel dieses Ausschnitts ist gleich $\frac{360^0}{\pi} = 114^0\,36'$ **)

Aufgabe 15. Welcher Kreisausschnitt hat bei gegebenem Inhalte den kleinsten Umfang?

Aufl. Der Bogen ist hier, eben so wie in der vorhergehenden Aufgabe, dem Durchmesser gleich, also auch der Centriwinkel der nämliche, und der Radius ist gleich der Seite des Quadrats, dessen Inhalt gleich dem gegebenen ist.

II. Aufgaben aus der Stereometrie.

Aufgabe 16. Welcher Cylinder***) hat, wenn der Umfang des Axenschnitts = 2p gegeben ist, den größten Inhalt?

Aufl. Bezeichnen wir (in dieser und eben so in den nächstfolgenden Aufgaben) den Radius mit x, die Höhe mit y, so bietet uns die Aufgabe folgende Gleichungen dar

$$2x + y = p \text{ und } x^2y\pi = \text{Maximum},$$

aus denen leicht $x' = \frac{1}{3}p = y'$ hervorgeht. Die Höhe ist folglich bei dem gesuchten Cylinder dem Radius der Grundfläche gleich.

*) Die Grundlinie ist dort mit a, hier mit 2g bezeichnet.
**) Vergl. Planimetri §. 223, Anm. 2.
***) Unter Cylinder ist hier und im Folgenden und eben so unter Kegel der gerade zu verstehen.

Aufgabe 17. Welcher Cylinder hat bei gegebenem Umfange des Axenschnitts den größten Mantel*)?

Aufgabe 18. Welcher Cylinder hat bei gegebenem Umfange des Axenschnitts die größte Oberfläche**)?

Aufgabe 19. Welcher Cylinder hat, wenn die Oberfläche $= O$ gegeben ist, den größten Inhalt?

Aufl. Aus der Aufgabe entnehmen wir die Gleichungen

$$1)\ 2x^2\pi + 2xy\pi = O \text{ und } 2)\ x^2y\pi = \text{Maximum}.$$

Eliminiren wir zwischen denselben y, so erhalten wir nach einiger Reduction

$$\tfrac{1}{2}Ox - x^3\pi = \text{Maximum},$$

folglich

$$x' = \sqrt{\frac{O}{6\pi}}.$$

Setzen wir demgemäß in der Gleichung (1) $O = 6x'^2\pi$, so ergibt sich $y' = 2x'$. Der gleichseitige Cylinder hat daher bei gegebener Oberfläche den größten körperlichen Inhalt.

Aufgabe 20. Bei welchem Cylinder ist, wenn der Inhalt $= J$ gegeben, die Summe aus dem Mantel und einer Grundfläche am kleinsten?

Aufl. Die Aufgabe führt zu den Gleichungen

$$x^2\pi y = J \text{ und } x^2\pi + 2x\pi y = \text{Minimum},$$

aus welchen durch Elimination von y und einige Reduction

$$\frac{2J}{\pi x} + x^2 = \text{Minimum}$$

hervorgeht. Stellen wir diese Gleichung mit der Gleichung (3) des §. 2

$$\frac{2m^3}{x} + x^2 = \text{Minimum}$$

zusammen, so ergibt sich

$$x' = m = \sqrt[3]{\frac{J}{\pi}} \text{ und } y' = x'.$$

Der gesuchte Cylinder ist also ein halber gleichseitiger Cylinder, was auch mit der Auflösung der vorhergehenden Aufgabe übereinstimmt, nach welcher der gleichseitige Cylinder bei gegebener Oberfläche den größten körperlichen Inhalt hat***).

Aufgabe 21. In eine Kugel, deren Radius $= r$ gegeben ist, den Cylinder vom größten körperlichen Inhalte zu construiren.

Aufl. Aus der Aufgabe entnehmen wir die Gleichungen

$$4x^2 + y^2 = 4r^2 \text{ und } x^2y\pi = \text{Maximum}.$$

---

*) Wir haben bei dieser und einigen folgenden Aufgaben die leicht zu findenden Auflösungen übergangen und dem Leser zur eigenen Uebung überlassen.

**) Die Umkehrung der drei zuletzt behandelten Aufgaben führt zu den drei folgenden eben so leicht zu lösenden Aufgaben: Welcher Cylinder hat, wenn der Inhalt oder der Mantel oder die Oberfläche gegeben ist, den kleinsten Umfang des Axenschnittes? — In gleicher Weise lassen sich durch Umkehrung der im Folgenden behandelten Aufgaben neue Reihen von Aufgaben bilden.

***) Zufolge der eben gelösten Aufgabe wird man bei der Anfertigung von Hohlmaßen aus Holz, Blech u. s. w., wenn dieselben die Form von Cylindern erhalten, am meisten an dem Material sparen, wenn man die Höhe gleich dem Halbmesser der Grundfläche macht.

Eliminiren wir x, so bekommen wir nach einiger Reduction

$$4r^2y - y^3 = \text{Maximum},$$

woraus $y' = 2r\sqrt{\tfrac{1}{3}}$ und $2x' = 2r\sqrt{\tfrac{2}{3}}$

und folglich $y' : 2x' = 1 : \sqrt{2}$

hervorgeht. Es verhält sich daher bei dem größten in eine Kugel zu construirenden Cylinder die Höhe zum Durchmesser wie die Seite eines Quadrates zur Diagonale.

Aufgabe 22. In eine gegebene Kugel den Cylinder vom größten Mantel zu construiren.

Aufgabe 23. Wie müssen bei einem Cylinder der Radius und die Höhe angenommen werden, damit der Radius der umbeschriebenen Kugel, wenn die Oberfläche des Cylinders = O gegeben ist, am kleinsten wird?

Aufl. Die Aufgabe liefert die Gleichungen

$$1)\ 2x^2\pi + 2xy\pi = O \quad \text{und} \quad 2)\ 4x^2 + y^2 = \text{Minimum}.$$

Eliminiren wir y, so erhalten wir weiter

$$\frac{20x^4\pi^2 + O^2}{4x^2\pi^2} - \frac{O}{\pi} = \text{Minimum},$$

wofür wir auch setzen können $\frac{O^2}{10x^2\pi^2} + 2x^2 = \text{Minimum}.$

Stellen wir diese Gleichung mit der Gleichung (5) des §. 2

$$\frac{2m^4}{x^2} + 2x^2 = \text{Minimum}$$

zusammen, so finden wir

$$x' = \sqrt{\frac{O}{2\pi\sqrt{5}}}.$$

Ersetzen wir in der Gleichung (1) O durch $2\pi x'^2\sqrt{5}$, so ergibt sich aus derselben

$$y' = x'(\sqrt{5} - 1)$$

und folglich $y' : 2x' = (\sqrt{5} - 1) : 2.$

Es verhält sich hiernach die Höhe des gesuchten Cylinders zu dem Durchmesser wie die Seite eines regelmäßigen Zehnecks zu dem Radius des umbeschriebenen Kreises*).

Fügen wir noch hinzu, daß bekanntlich der Radius eines Kreises, die Seite des einbeschriebenen Zehnecks und die Seite des Fünfecks ein rechtwinkliges Dreieck bilden, welches die letztere Seite zur Hypotenuse hat, daß bei dem gesuchten Cylinder die Höhe und der Durchmesser als Catheten ein rechtwinkliges Dreieck bilden, welches den Durchmesser der Kugel zur Hypotenuse hat, so ergibt sich aus der eben erwiesenen Proportion, daß sich bei dem gesuchten Cylinder die Höhe, der Durchmesser desselben und der Durchmesser der Kugel wie die Seite des Zehnecks, der Radius des umbeschriebenen Kreises und die Seite des Fünfecks verhalten.

In der eben gelösten Aufgabe ist zugleich die Auflösung der Aufgabe enthalten, in eine gegebene Kugel den Cylinder von der größten Oberfläche zu construiren**).

---

*) Anfangsgründe der Planimetrie §. 274.

**) Die directe Lösung dieser Aufgabe führt zunächst auf die Gleichung

$$2x^2\pi + 2x\pi y = \text{Maximum},$$

wofür wir auch, da $4x^2 + y^2 = 4r^2$ ist, setzen können

$$\frac{x^2 + xy}{4x^2 + y^2} = \text{Maximum}$$

Aufgabe 24. In einen Kegel, von welchem die Höhe $= h$ und der Radius der Grundfläche $= r$ gegeben sind, den Cylinder von der größten Oberfläche zu construiren.

Aufl. Die Aufgabe führt zu den Gleichungen

$$h : y = r : r - x \text{ und } 2x^2\pi + 2xy\pi = \text{Maximum}.$$

Eliminiren wir zwischen denselben y, so erhalten wir

$$2x^2\pi + \frac{2h(r-x)x\pi}{r} = \text{Maximum},$$

wofür wir auch setzen können

$$\frac{hrx}{h-r} - x^2 = \text{Maximum}.$$

Stellen wie diese Gleichung mit der Gleichung

$$2mx - x^2 = \text{Maximum}$$

zusammen, so bekommen wir

$$x' = m = \frac{hr}{2(h-r)}$$

und folglich $$y' = \frac{h(h-2r)}{2(h-r)}.$$

Die Auflösung setzt also voraus, daß $h > 2r$ ist, indem entgegengesetzten Falles $y = 0$ oder negativ würde*).

Aufgabe 25. In einen gegebenen Kegel den Cylinder vom größten Mantel zu construiren.

Aufgabe 26. In einen gegebenen Kegel den Cylinder vom größten körperlichen Inhalte zu construiren.

Aufgabe 27. Aus einem gegebenen Kreise denjenigen Ausschnitt auszuschneiden, welcher, zum Kegelmantel zusammengerollt, den Kegel vom größten körperlichen Inhalte umschließt.

---

und folglich $$\frac{4x^2 + y^2}{x^2 + xy} = \text{Minimum}.$$

Wenn wir Zähler und Nenner durch x^2 dividiren und $1 + \frac{y}{x} = z$ setzen, so ergibt sich aus der zuletzt erhaltenen Gleichung

$$\frac{5}{z} + z = \text{Minimum},$$

also vermöge der Formel (1) in §. 2 $z' = \sqrt{5}$ und folglich übereinstimmend mit dem Obigen

$$\frac{y}{x} = \sqrt{5} - 1.$$

*) Bezeichnen wir nämlich mit r den Radius und mit h die Höhe des gegebenen Kegels, ferner mit x den Radius, mit y die Höhe und mit O die Oberfläche des in diesen Kegel zu zeichnenden Cylinders, so ist

$$O = 2x^2\pi + 2x\pi y = 2x^2\pi + 2x\pi\left(h - \frac{hx}{r}\right).$$

Diese Gleichung aber läßt sich umformen in

$$\frac{O}{2\pi} = r^2 - (r-x)\left(r - x + \frac{(2r-h)x}{r}\right).$$

Da x nothwendig $< r$ ist, so wird dieser Ausdruck, wenn $h < 2r$ vorausgesetzt ist, um so größer, je weniger x von r verschieden ist; er würde am größten werden, wenn man $x = r$ setzen wollte; dann würde aber y verschwinden, die obere und untere Grundfläche des Cylinders würden zusammenfallen, und es könnte nicht füglich mehr von einem Cylinder die Rede sein.

Aufl. Bezeichnen wir den Radius des gegebenen Kreises mit r, den in Graden ausgedrückten Centriwinkel des gesuchten Ausschnitts mit ω, so ist der zugehörige Bogen $= \frac{r\pi\omega}{180}$, und da dieser Bogen gleich dem Umfange des gesuchten Kegels ist, so erhalten wir, wenn wir den Radius desselben mit x bezeichnen, die Gleichung

$$2x\pi = \frac{r\pi\omega}{180}, \text{ also } 1)\ x = \frac{r\omega}{360}.$$

Bezeichnen wir endlich noch die Höhe des gesuchten Kegels mit y, so erhalten wir weiter, da die schiefe Seite desselben offenbar $= r$ ist, die Gleichung

$$2)\ x^2 + y^2 = r^2;$$

aus der Aufgabe aber geht die Gleichung hervor

$$3)\ \tfrac{1}{3}x^2\pi y = \text{Maximum}.$$

Eliminiren wir zwischen den Gleichungen (1), (2) und (3) x und y, so ergibt sich nach einiger Reduction

$$4)\ \omega^2\sqrt{360^2 - \omega^2} = \text{Maximum}.$$

Ersetzen wir ω^2 durch u, und quadriren wir dann die linke Seite dieser Gleichung, so erhalten wir $\quad 5)\ 360^2u^2 - u^3 = \text{Maximum},$

woraus $\quad 6)\ u' = \tfrac{2}{3} . 360^2,$

also $\quad \omega' = 360\sqrt{\tfrac{2}{3}}$

hervorgeht. **Der Winkel desjenigen Ausschnitts, welcher den Kegel vom größten Inhalte umschließt, beträgt folglich** (ohngefähr) 294^0.

Aufgabe 28. Den Kegel von dem größten körperlichen Inhalte zu construiren, wenn der Umfang des Axenschnitts $= 2p$ gegeben ist.

Aufl. Bezeichnen wir hier und in den folgenden Aufgaben den Radius des gesuchten Kegels mit x, die Höhe mit y und die schiefe Seite mit z, so erhalten wir die Gleichungen $\quad x^2y = \text{Maximum}$ (§. 3),

$$x^2 + y^2 = z^2 \text{ und } x + z = p.$$

Eliminiren wir zwischen denselben y und z, so bekommen wir die Gleichung

$$x^2\sqrt{p^2 - 2px} = \text{Maximum},$$

wofür wir auch setzen können

$$2px^4 - 4x^5 = \text{Maximum}.$$

Stellen wir diese Gleichung mit der Gleichung

$$5mx^4 - 4x^5 = \text{Maximum}^{*})$$

zusammen, so ergibt sich

$$x' = m = \tfrac{2}{5}p, \text{ also } z' = \tfrac{3}{5}p \text{ und } y' = \tfrac{1}{5}p\sqrt{5};$$

folglich $\quad x' : y' : z' = 2 : \sqrt{5} : 3.$

Aufgabe 29. Den Kegel vom größten Mantel zu construiren, wenn der Umfang des Axenschnitts $= 2p$ gegeben ist.

Aufgabe 30. Den Kegel vom größten körperlichen Inhalte zu construiren, wenn der Mantel $= M$ gegeben ist.

Aufl. Die Aufgabe liefert uns die Gleichung

$$x^2y = \text{Maximum und } x\pi\sqrt{x^2 + y^2} = M.$$

---

*) Diese Gleichung ist nach Analogie der Gleichungen des §. 1 gebildet und der Beweis derselben in der Anm. 2. zu §. 1 enthalten; Leser, welche hierauf nicht eingehen wollen, können ohne wesentliche Benachtheiligung diese einzelne Aufgabe (28) überschlagen.

Eliminiren wir zwischen denselben y und setzen der Vereinfachung wegen $x^2 = u$, so können wir die Gleichung bilden

$$\frac{M^2 u}{\pi^2} - u^3 = \text{Maximum},$$

Stellen wir diese Gleichung mit der Gleichung

$$3m^2 u - u^3 = \text{Maximum}$$

zusammen, so erhalten wir

$$u' = m = \frac{M}{\pi}\sqrt{\tfrac{1}{3}},$$

also

$$x^2 = \frac{M}{\pi}\sqrt{\tfrac{1}{3}} \text{ und } y^2 = \frac{2M}{\pi}\sqrt{\tfrac{1}{3}},$$

folglich

$$x^2 : y^2 : z^2 = 1 : 2 : 3.$$

Aufgabe 31. Den Kegel vom größten Inhalte zu construiren, wenn die Oberfläche = O gegeben ist.

Aufl. Aus der Aufgabe ergeben sich die Gleichungen

$$x^2 y = \text{Maximum und } x^2\pi + x\pi\sqrt{x^2 + y^2} = O.$$

Eliminiren wir zwischen denselben y, so erhalten wir nach einiger Reduction

$$\frac{O}{\pi} x^2 - 2x^4 = \text{Maximum},$$

folglich

$$x' = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{O}{\pi}},\ y' = \sqrt{\frac{2O}{\pi}} \text{ und } z' = \tfrac{3}{2}\sqrt{\frac{O}{\pi}}.$$

Demnach verhält sich

$$x' : y' : z' = 1 : 2\sqrt{2} : 3.$$

Bei dem Kegel, welcher den größten körperlichen Inhalt bei gegebener Oberfläche hat, ist folglich die schiefe Seite das Dreifache des Radius.

Aufgabe 32. In eine Kugel, deren Radius = r gegeben ist, den Kegel vom größten Inhalte zu construiren.

Aufl. $x' = \tfrac{2}{3}r\sqrt{2},\ y' = \tfrac{4}{3}r$ und $z' = 2r\sqrt{\tfrac{2}{3}}$;

folglich $x'^2 : y'^2 : z'^2 = 1 : 2 : 3$,

also der nämliche Kegel wie bei der vorletzten Aufgabe. Der Inhalt dieses Kegels ist einer Kugel gleich, deren Durchmesser sich zum Durchmesser der gegebenen Kugel wie 2 : 3 verhält, und sein Schwerpunkt*) fällt in den Mittelpunkt der gegebenen Kugel.

Aufgabe 33. In eine Kugel denjenigen Kegel zu construiren, welcher den größten Mantel hat.

Die Auflösung führt auf den nämlichen Kegel wie die vorhergehende Aufgabe**).

---

*) Anfangsgründe der Physik §. 26.

**) Man wird hier die Aufgabe vermissen, in eine Kugel den Kegel von der größten Oberfläche zu construiren. Man erhält für die Auflösung die Gleichung

$$y(2r - y + \sqrt{4r^2 - 2ry}) = \text{Maximum},$$

oder wenn man $4r^2 - 2ry = u^2$ setzt,

$$(2r + u)^2 (2ru - u^2) = \text{Maximum}.$$

Wendet man die gewöhnliche Methode der Differentialrechnung an, so erhält man die Bedingungsgleichung $(2r + u)(2r^2 + ru - 2u^2) = 0$

und hieraus

$$u = \frac{r(1 + \sqrt{17})}{4},$$

folglich

$$y = \frac{r(23 - \sqrt{17})}{16},\quad x = r\frac{\sqrt{190 + 14\sqrt{17}}}{16} \text{ und } z = \frac{r\sqrt{46 - 2\sqrt{17}}}{4}.$$

Aufgabe 34. Um eine Kugel, deren Radius $= r$ gegeben ist, den Kegel vom kleinsten körperlichen Inhalte zu construiren.

Aufl. Ist $CD = y$, Fig. 4, die Höhe, $AD = BD = x$ der Radius der Grundfläche des gesuchten Kegels und $ED = EF = r$ der Radius der gegebenen Kugel, so können wir zunächst wegen Aehnlichkeit der Dreiecke BDC und EFC die Proportion aufstellen

$$BD : CD = EF : CF,$$

oder

$$x : y = r : \sqrt{(r - y)^2 - r^2},$$

also

$$x = \frac{ry}{\sqrt{(y^2 - 2ry)}}.$$

Wenn wir diesen Werth von x in die Gleichung

$$x^2 y = \text{Minimum}$$

einsetzen, so verwandelt sich dieselbe in

$$\frac{r^2 y^2}{y - 2r} = \text{Minimum};$$

und wenn wir

$$y - 2r = u$$

setzen, so ergibt sich

$$u + \frac{4r^2}{u} = \text{Minimum},$$

also

$$u' = 2r,\ y' = 4r,\ x' = r\sqrt{2} \text{ und } z' = 3r\sqrt{2}.$$

Die schiefe Seite dieses Kegels ist also dreimal so groß, als der Radius der Grundfläche; sein Inhalt und eben so seine Oberfläche sind doppelt so groß, als der Inhalt und die Oberfläche der Kugel, um welche derselbe beschrieben ist. Dieser Kegel hat von allen um die nämliche Kugel zu beschreibenden Kegeln auch die kleinste Oberfläche, da der Inhalt eines jeden um eine Kugel construirten Kegels gleich dem Inhalte einer Pyramide ist, welche die Oberfläche desselben zur Grundfläche und den Radius der Kugel zur Höhe hat, wonach sich die Inhalte der um die nämliche Kugel construirten Kegel wie ihre Oberflächen verhalten. Bei dem Kegel von der kleinsten Oberfläche und dem kleinsten Inhalte ist der Mantel $1\frac{1}{2}$ mal und die Grundfläche $\frac{1}{2}$ mal so groß, als die Oberfläche der Kugel, um welche derselbe construirt ist. Der Schwerpunkt desselben fällt in den Mittelpunkt der eingeschriebenen Kugel.

Aufgabe 35. Um eine Kugel den Kegel vom kleinsten Mantel zu construiren.

Aufl. $x' = r\sqrt{1 + \sqrt{2}}$, $y' = r(2 + \sqrt{2})$ und $z' = r\sqrt{7 + 5\sqrt{2}}$.

Aufgabe 36. Welcher unter allen Kegeln, deren Spitze im Mittelpunkte und deren Umfang der Grundfläche auf der Oberfläche einer Kugel liegt, hat den größten körperlichen Inhalt?

Aufl. $x' = r\sqrt{\frac{2}{3}}$ und $y' = r\sqrt{\frac{1}{3}}$, folglich $y' : x' = 1 : \sqrt{2}$.

Aufgabe 37. Um eine Kugel den kleinsten abgekürzten Kegel zu construiren.

Aufl. Wenn wir den Radius der Kugel $EG = FG = r$, Fig. 5, den Radius der untern Grundfläche des Kegels $AE = BE = x$ und den Radius der obern

---

Bezeichnen wir den 17. Theil eines flachen Winkels mit φ, dann ist nach Brennecke's Trigonometrie (Berlin, 1856) S. 89

$$\cos 3\varphi + \cos 5\varphi - \cos 6\varphi + \cos 7\varphi = \frac{1 + \sqrt{17}}{4},$$

also

$$y = \frac{r(6 - \cos 3\varphi + \cos 5\varphi + \cos 6\varphi - \cos 7\varphi)}{4}.$$

Grundfläche CF = DF = y setzen, so erhalten wir zunächst aus der Aufgabe die Gleichung $x^2 + xy + y^2 =$ Minimum*)
und dann weiter, da BH = BE = x und CH = CF = y ist,

$$(x + y)^2 = 4r^2 + (x - y)^2,$$

also

$$y = \frac{r^2}{x}.$$

Setzen wir diesen Werth in die obige Gleichung ein, so verwandelt sich dieselbe in

$$x^2 + \frac{r^2}{x^2} = \text{Minimum},$$

woraus sich

$$x' = r = y'$$

ergibt. Der gesuchte abgekürzte Kegel ist also ein gleichseitiger Cylinder.

Derselbe hat auch, wie leicht zu sehen (vergl. Aufg. 34), die kleinste Oberfläche.

Aufgabe 38**). Um eine Kugel den abgekürzten Kegel vom kleinsten Mantel zu construiren.

Die Auflösung führt ebenfalls auf den gleichseitigen Cylinder.

Aufgabe 39. In ein regelmäßiges Octaeder das größte rechtwinklige Parallelepipedum mit quadratischer Grundfläche so zu construiren, daß die Ecken des Parallelepipedums in die Kanten des Octaeders und die Axe des Parallelepipedums mit einer Diagonale des Octaeders zusammenfällt.

Aufl. Bezeichnen wir die Kante des Octaeders mit a, die Grundkante des gesuchten Parallelepipedums mit x, die Seitenkante mit y, so erhalten wir zunächst die Gleichung

$$x^2y = \text{Maximum}.$$

Es sei ferner ABCD, Fig. 6, ein durch vier in der nämlichen Ebene liegende Ecken gelegter Durchschnitt des Octaeders, und es seien E und F in der nämlichen Seitenkante des gesuchten Parallelepipedums liegende Punkte; dann ist EF = y und BE = DF = x; denn die Grundflächen des Parallelepipedums schneiden von dem Octaeder zwei kleine vierseitige Pyramiden ab, welche eben diese Grundflächen zu Grundflächen, zu Seitenflächen aber den Seitenflächen des Oktaeders ähnliche, also gleichseitige Dreiecke haben. Nun ist AE = AB — BE = a — x und in dem gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecke EAF

$$y = (a - x)\sqrt{2}.$$

Setzen wir diesen Werth in die obige Gleichung ein, so ergibt sich

$$2ax^2 - 2x^3 = \text{Maximum},$$

folglich

$$x' = \tfrac{2}{3}a \text{ und } y' = \tfrac{1}{3}a\sqrt{2},$$

d. h. die Grundkante des Parallelepipedums beträgt $\frac{2}{3}$ der Kante (AB) des Octaeders, und die Seitenkante des Parallelepipedums ist $\frac{1}{3}$ der Diagonale (BD) des Octaeders, der Inhalt des Parallelepipedums folglich $\frac{4}{9}$ vom Inhalte des Octaeders***).

Aufgabe 40. In ein Octaeder in der bei der vorhergehenden Aufgabe angegebenen Weise ein rechtwinkliges Parallelepipedum so zu construiren, daß die Oberfläche am größten wird.

Aufl. $x' = \dfrac{a(4 + \sqrt{2})}{7}, \; y' = \dfrac{a(3\sqrt{2} - 2)}{7}.$

---

*) Anfangsgründe der Stereometrie 7. Aufl. §. 203.

**) Wenn man in den Aufgaben (16) bis (38) statt Cylinder nseitiges regelmäßiges Prisma und statt Kegel nseitige regelmäßige Pyramide setzt, so erhält man 23 in ganz gleicher Weise wie die hier aufgeführten zu behandelnde Aufgaben. In den Aufgaben, in welchen der Axenschnitt in Betracht gezogen wird, muß n eine gerade Zahl sein.

***) Vergl. auch Stereometrie §. 186.

Aufgabe 41. Die nämliche Aufgabe wie vorher, jedoch mit der abgeänderten Vorschrift, daß die Seitenfläche am größten wird.

Aufl. Die Ecken des gesuchten Parallelepipedums fallen in die Mitten der Kanten des Octaeders; die Grundkante und die Seitenkante des Parallelepipedums sind gleich der halben Kante und der halben Diagonale des Octaeders*).

III. Aufgaben aus der Physik.

Aufgabe 42. Aus einem cylinderförmigen Baumstamme den rechteckigen Balken von der größten relativen Festigkeit auszuschneiden.

Aufl. Nach den Lehren der Physik wächst die relative Festigkeit in gleichem Verhältnisse mit der Breite und im quadratischen mit der Höhe des Balkens**). Bezeichnen wir daher den Radius des gegebenen cylinderförmigen Stammes mit r, die Breite des auszuschneidenden Balkens mit x, die Höhe mit y, so erhalten wir die Gleichungen

$$x^2 + y^2 = 4r^2 \text{ und } xy^2 = \text{Maximum},$$

woraus sich leicht $x = 2r\sqrt{\tfrac{1}{3}}$ und $y = 2r\sqrt{\tfrac{2}{3}}$

ergibt; es verhält sich daher bei dem Balken von der größten relativen Festigkeit die Breite zur Höhe wie die Seite eines Quadrates zu seiner Diagonale.

Aufgabe 43. Bis zu welcher Höhe steigt ein mit der Geschwindigkeit c unter dem Winkel α schief aufwärts geworfener Körper, wenn von dem Widerstande der Luft abgesehen und der Raum, welchen ein frei fallender Körper in der ersten Secunde zurücklegt, $= \tfrac{1}{2}g$ gesetzt wird?

Aufl. Bezeichnen wir die Höhe, in welcher ein schief aufwärts geworfener Körper unter den angegebenen Bedingungen, nachdem x Secunden verflossen sind, sich befindet, mit y, so ist nach den Lehren der Physik $y = cx \sin\alpha - \tfrac{1}{2}gx^2$.

Wir haben daher die Gleichung

$$\frac{2cx \sin\alpha}{g} - x^2 = \text{Maximum},$$

aufzulösen, aus welcher wir erhalten

$$x' = \frac{c \sin\alpha}{g} \text{ und folglich } y' = \frac{c^2 \sin\alpha^2}{g^2}.$$

Aufgabe 44. Eine Lichtflamme ist in lotrechter Richtung AC, Fig. 7, beweglich; in welcher Höhe muß dieselbe über der horizontalen Ebene AB angebracht werden, um eine bestimmte Stelle B dieser Ebene am stärksten zu erleuchten?

Aufl. Nach den Lehren der Physik***) ist die Erleuchtung dem Quadrate der Entfernung der Lichtquelle von der zu erleuchtenden Stelle umgekehrt und dem Sinus des Neigungswinkels, unter welchen die Lichtstrahlen auf dieselbe auffallen, direct proportional. Wir erhalten daher die Gleichung

$$\frac{\sin ABL}{BL^2} = \text{Maximum},$$

oder wenn wir die gesuchte Höhe AL = x und die horizontale Entfernung AB = a setzen und den so erhaltenen Ausdruck quadriren,

$$\frac{x^2}{(a^2 + x^2)^3} = \text{Maximum}.$$

*) Diese und die beiden vorhergehenden Aufgaben sind nur Modificationen der unter Nr. 24, 25 und 26 aufgeführten Aufgaben und könnten daher auch nach Analogie jener Aufgaben behandelt werden.

**) Anfangsgründe der Physik §. 11.

***) A. a. O. §. 188.

Diese Gleichung verwandelt sich, wenn wir

$$a^2 + x^2 = \frac{1}{z}, \text{ also } x^2 = \frac{1}{z} - a^2$$

setzen, in $$z^2 - a^2z^3 = \text{Maximum},$$

wofür wir auch schreiben können

$$\frac{2z^2}{a^2} - 2z^3 = \text{Maximum}.$$

Wir finden so $$z' = \frac{2}{a^2}, \text{ also } x' = a\sqrt{\tfrac{1}{2}}.$$

Wir erhalten hiernach die gesuchte Höhe durch geometrische Construction, wenn wir auf AB in B ein Lot BD = AB errichten, AD in E halbiren und AL = AE machen.

Zweiter Abschnitt.

A. Von den Factoriellen*).

Bemerkung. Ehe wir zu diesem Gegenstande selbst übergehen, schicken wir noch einige in der Arithmetik und Algebra übergangene (im Folgenden aber nicht wohl zu entbehrende) Sätze über die Binomialcoefficienten voraus.

§. 4. Erklärung.

Im Folgenden werden wir uns einer (bereits in der Arithm. §. 269 angewendeten) abkürzenden Bezeichnung für die Binomialcoefficienten bedienen, nämlich

$$m = m_1$$

$$\frac{m(m-1)}{1 \,.\, 2} = m_2$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} = m_3$$

u. s. w., allgemein

$$\frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-p+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \dots p} = m_p,$$

wo m und p positive ganze Zahlen bedeuten und $p <$ oder höchstens $= m$ gedacht wird.

Wir nennen m den Exponenten**) und die angehängte Ziffer 1, 2, 3... oder p den Zeiger des Binomialcoefficienten.

§. 5. Zusatz.

In der nach dem binomischen Satze (Arithm. §. 270) entwickelten Potenz $(a + b)^m$ ist bekanntlich der erste Coefficient gleich dem letzten, der zweite gleich dem vorletzten, der dritte gleich dem drittletzten; überhaupt sind je

*) S. die Vorrede.

**) Andere Schriftsteller nennen m die Basis.

zwei von den Enden gleich weit abstehende Coefficienten einander gleich; wir erhalten so*) die Gleichungen

$$m_1 = m_{m-1}$$
$$m_2 = m_{m-2}$$
$$m_3 = m_{m-3}$$

u. s. w., allgemein

$$m_p = m^{m-p}.$$

So ist z. B. $12_4 = 12_8$; denn es ist

$$12_4 = \frac{12.11.10.9}{1.2.3.4} = \frac{12.11.10.9.8.7.6.5.4.3.2.1}{1.2.3.4.1.2.3.4.5.6.7.8}$$

und $$12_8 = \frac{12.11.10.9.8.7.6.5}{1.2.3.4.5.6.7.8} = \frac{12.11.10.9.8.7.6.5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5.6.7.8.1.2.3.4}.$$

Eben so ist ganz allgemein

$$m_p = \frac{m(m-1)\ldots.(m-p+1)}{1.2\ldots..p} = \frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)(m-p)(m-p-1)\ldots2.1}{1.2\ldots.p.1.2\ldots(m-p)}$$

und $$m_{m-p} = \frac{m(m-1)\ldots(p+1)}{1.2\ldots(m-p)} = \frac{m(m-1)\ldots(p+1)p(p-1)\ldots2.1}{1.2\ldots(m-p).1.2\ldots p},$$

also $m_p = m_{m-p}$.

Man kann diese Gleichung in Worten dahin aussprechen: Zwei Binomialcoefficienten, welche den nämlichen Exponenten haben, sind gleich, wenn die Summe ihrer Zeiger gleich dem Exponenten ist.

§. 6. Lehrsatz.

Der Coefficient irgend eines Gliedes der entwickelten Potenz eines Binomiums ist gleich der Summe aus dem eben so vielten und dem vorangehenden Coefficienten der nächst niedrigeren Potenz, in Zeichen $(m+1)_p = m_p + m_{(p-1)}$.

Beweis. Die Richtigkeit dieses Satzes erkennt man sehr leicht, wenn man erwägt, wie jede folgende Potenz des Binomiums $a + b$ aus der vorangehenden durch Multiplication mit $a + b$ erhalten wird. Entwickelt man z. B. die fünfte Potenz von $a + b$ nach dem binomischen Lehrsatze (Arithm. §. 271), und multiplicirt man dieselbe dann mit $a + b$, so ergibt sich das folgende Schema der Rechnung

$$\begin{array}{rl}
(a+b)^5 = & a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 \\
& a + b \\
\hline
& a^6 + 5a^5b + 10a^4b^2 + 10a^3b^3 + 5a^2b^4 + ab^5 \\
& \quad + a^5b + 5a^4b^2 + 10a^3b^3 + 10a^2b^4 + 5ab^5 + b^6 \\
\hline
(a+b)^6 = & a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6.
\end{array}$$

Hier ist z. B. der 3. Coefficient 15 in der 6. Potenz die Summe aus dem 3. und 2. Coefficienten 10 und 5 in der 5. Potenz. Eben so sieht

*) indem wir die Coefficienten (1) des ersten Gliedes a^m und des letzten Gliedes b^m nicht mitzählen, also m_1 den ersten, m_2 den zweiten Coefficienten nennen, weil diese Art zu zählen offenbar bequemer ist.

man deutlich, wie Aehnliches von den übrigen Coefficienten gilt, und wie überhaupt der Satz für jede zwei auf einander folgende Potenzen richtig sein muß.

Anm. 1. Dieser Satz bietet uns ein Mittel dar, unabhängig von dem binomischen Lehrsatze die Coefficienten der auf einander folgenden Potenzen eines Binomiums mit Leichtigkeit darzustellen, wie dies das folgende Schema zeigt.

1	1									
1	2	1								
1	3	3	1							
1	4	6	4	1						
1	5	10	10	5	1					
1	6	15	20	15	6	1				
1	7	21	35	35	21	7	1			
1	8	28	56	70	56	28	8	1		
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

u. s. w.

Der Anblick dieser Tabelle läßt bald die Uebereinstimmung der senkrecht unter einander stehenden Zahlen mit den figurirten Zahlenreihen (Arithm. §. 250) erkennen, wovon der Grund sich leicht aus der Art und Weise ergibt, wie diese Tabelle zufolge des obigen Satzes gebildet worden ist.

So ist z. B. der 3. Coefficient

in der 10. Potenz $45 = 36 + 9$
" " 9. " $36 = 28 + 8$
" " 8. " $28 = 21 + 7$
" " 7. " $21 = 15 + 6$
" " 6. " $15 = 10 + 5$
" " 5. " $10 = 6 + 4$
" " 4. " $6 = 3 + 3$
" " 3. " $3 = 2 + 1$,

folglich wenn wir addiren,

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45 = \frac{9 \, . \, 10}{1 \, . \, 2},$$

allgemein $$1 + 2 + 3 + 4 \ldots + n = \frac{n(n+1)}{1 \, . \, 2}.$$

Eben so läßt sich aus der vorstehenden Tabelle die Uebereinstimmung der übrigen senkrechten Zahlenreihen mit den figurirten Zahlenreihen der verschiedenen Ordnungen leicht nachweisen.

Wir können aber auch aus der oben erwiesenen Gleichung

$$1) \quad m_p + m_{p-1} = (m+1)_p$$

sofort die folgende allgemeine Formel ableiten, welche sämmtliche Formeln der figurirten Zahlen als specielle Fälle in sich schließt,

$$m_m + (m+1)_m + (m+2)_m + (m+3)_m \ldots + (m+n-1)_m = (m+n)_{m+1}.$$

Wir gehen bei dieser Ableitung aus von der Gleichung

$$m_m = 1 = (m+1)_{m+1}.$$

Addiren wir zu beiden Seiten derselben $(m+1)_m$, und wenden wir auf der rechten Seite die Gleichung (1) an, so erhalten wir

$$m_m + (m+1)_m = (m+2)_{m+1}.$$

Addiren wir eben so $(m+2)_m$, so erhalten wir weiter

$$m_m + (m+1)_m + (m+2)_m = (m+3)_{m+1}.$$

Eben so finden wir

$$m_m + (m+1)_m + (m+2)_m + (m+3)_m = (m+4)_{m+1}$$

und auf diesem Wege fortfahrend allgemein

$$2)\quad m_m + (m+1)_m + (m+2)_m \ldots + (m+n-1)_m = (m+n)_{m+1}.$$

Setzen wir nun in dieser Gleichung nach einander $m = 1$, $m = 2$, $m = 3$ u. s. w., so erhalten wir die drei folgenden Formeln der figurirten Zahlenreihen darstellenden Gleichungen

$$1 + 2 + 3 \ldots\ldots + n = \frac{n(n+1)}{1.2},$$

$$\frac{1.2}{1.2} + \frac{2.3}{1.2} + \frac{3.4}{1.2} \ldots\ldots + \frac{n(n+1)}{1.2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3},$$

$$\frac{1.2.3}{1.2.3} + \frac{2.3.4}{1.2.3} + \frac{3.4.5}{1.2.3} \ldots\ldots + \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}$$

u. s. w. Unerwähnt wollen wir nicht lassen, daß man vermöge des in §. 5 erwiesenen Satzes die merkwürdige Gleichung (2) auch in der folgenden Form schreiben kann

$$1 + (m+1)_1 + (m+2)_2 + (m+3)_3 \ldots (m+n-1)_{n-1} = (m+n)_{n-1}.$$

Endlich bemerken wir in Betreff der figurirten Zahlen noch Folgendes: Bekanntlich (Arithm. §. 254) ist die m-Zahl der n-Ordnung

$$= \frac{m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)}{1.2.3\ldots n} = (m+n-1)_n$$

und nach §. 5 ist $\quad (m+n-1)_n = (n+m-1)_{m-1}$,

d. h.: die m-Zahl der n-Ordnung ist gleich der n-Zahl der $m-1$-Ordnung.

Setzen wir nun statt n nach der Reihe die Zahlen 1, 2, 3, 4..., so ergibt sich hieraus: die m-Zahl der 1., 2., 3., 4... Ordnung ist gleich der 1., 2., 3., 4... Zahl der $m-1$-Ordnung. Es bilden daher diejenigen Zahlen, welche in den aufeinander folgenden figurirten Zahlenreihen eine gleich hohe Stelle einnehmen, wieder eine figurirte Zahlenreihe*).

Anm. 2. Wir haben oben die Gleichung

$$(m+1)_p = m_p + m_{p-1}$$

aus dem binomischen Lehrsatze abgeleitet, welcher früher unter der Voraussetzung, daß der Exponent m eine positive ganze Zahl bedeutet, bewiesen worden ist. Die vorstehende Gleichung bleibt jedoch (und eben so der binomische Lehrsatz, wie wir weiterhin zeigen werden) auch dann noch richtig, wenn m eine negative oder gebrochene Zahl bedeutet. Es ist nämlich $\quad m_p = \frac{m(m-1)\ldots(m-p+2)(m-p+1)}{1.2\ldots(p-1)p}$

und $\quad m_{p-1} = \frac{m(m-1)\ldots(m-p+2)}{1.2\ldots(p-1)} = \frac{m(m-1)\ldots(m-p+2)p}{1.2\ldots(p-1)p}$,

folglich

$$m_p + m_{p-1} = \frac{m(m-1)\ldots(m-p+2)(m+1)}{1.2\ldots\ldots p}$$

$$= \frac{(m+1)m(m-1)\ldots[(m+1)-p+1]}{1.2.3\ldots p}$$

$$= (m+1)_p.$$

*) In der dem §. 250 der Arithm. beigefügten Tabelle bilden daher nicht bloß die in senkrechter Reihe stehenden Zahlen, sondern auch die in wagerechter Reihe stehenden figurirte Zahlenreihen.

§. 7. Erklärung.

Ein Product aus n Factoren, deren jeder gleich a ist, wo a einen beliebigen Ausdruck, n eine positive ganze Zahl bezeichnet, wird bekanntlich mit a^n (lies: a hoch n) bezeichnet und dieses Zeichen eine Potenz genannt. Denkt man sich ein Product gebildet, welches ebenfalls aus n Factoren besteht, in welchem aber nur der erste Factor gleich a, der zweite gleich $a + d$, der dritte gleich $a + 2d$ u. s. w., endlich der n=Factor gleich $a + (n - 1)d$ ist, so daß also die Factoren eine arithmetische Reihe mit dem Anfangsgliede a, der beständigen Differenz d und der Anzahl der Glieder n bilden, so wird dieses Product durch

$$a^{n|d}$$

[lies: a hoch n mit (der Differenz) d] bezeichnet und dieses Zeichen eine Factorielle genannt. a heißt der Dignend, n der Exponent, d die Differenz. Der Exponent n ist hiernach eine positive ganze Zahl, während der Dignend a und die Differenz beliebige Ausdrücke sein können.

Obschon ein Product niemals nur einen Factor haben kann, so pflegt man sich doch auch des Zeichens $a^{1|d}$ zu bedienen, hierunter aber nichts anders, als den Dignenden a zu verstehen.

Anm. Zufolge der vorstehenden Erklärung ist z. B.

$$7^{3|1} = 7 . 8 . 9$$

$$1^{6|2} = 1 . 3 . 5 . 7 . 9 . 11$$

$$20^{5|-3} = 20 . 17 . 14 . 11 . 8.$$

§. 8. Zusatz.

Wenn wir in der Factoriellen

$$a^{n|d} = a(a + d)(a + 2d) \dots (a + (n - 1)d)$$

$d = 0$ setzen, so verwandelt sich dieselbe in die ganze Potenz

$$a^n = \overset{(n\ \text{mal})}{a . a . a \dots a}.$$

Die (ganze) Potenz ist folglich ein specieller Fall der Factoriellen, welcher entsteht, wenn die Differenz $d = 0$ ist.

Aus der Erklärung des vorherg. §. ergibt sich leicht weiter die Richtigkeit der folgenden Gleichungen:

$$1)\quad a^{n+1|d} = a^{n|d} . (a + nd).$$

So ist z. B. $a^{4|d} = a(a + d)(a + 2d)(a + 3d)$
und $a^{5|d} = a(a + d)(a + 2d)(a + 3d)(a + 4d)$,
folglich $a^{5|d} = a^{4|d} . (a + 4d)$.

$$2)\quad a^{m+n|d} = a^{m|d} . (a + md)^{n|d}.$$

So ist z. B. $a^{5|d} = a(a + d)(a + 2d)(a + 3d)(a + 4d)$,
$(a + 5d)^{3|d} = (a + 5d)(a + 6d)(a + 7d)$
und $a^{8|d} = a(a+d)(a+2d)(a+3d)(a+4d)(a+5d)(a+6d)(a+7d)$,
folglich $a^{8|d} = a^{5|d} . (a + 5d)^{3|d}$.

$$3)\quad a^{n|+d} = (a + (n - 1)d)^{n|-d}$$

Denn die Factoren der Factorielle $a^{n|+d}$ sind die Glieder einer arithmetischen Reihe mit dem Anfangsgliede a, der Differenz d und der Anzahl der Glieder n, und die Factorielle $(a + (n - 1)d)^{n|-d}$ hat zu Factoren die Glieder einer arithmetischen Reihe, von welcher das erste Glied $= a + (n - 1)d$,

die Differenz $= -d$ und die Anzahl der Glieder $= n$ ist. Diese beiden Reihen sind aber offenbar nicht von einander verschieden; die eine enthält dieselben Glieder wie die andere, aber in umgekehrter Ordnung.

So ist z. B. $a^{6|+d} = a(a+d)(a+2d)(a+3d)(a+4d)(a+5d)$

und $(a+5d)^{6|-d} = (a+5d)(a+4d)(a+3d)(a+2d)(a+d)a,$

folglich $a^{6|+d} = (a+5d)^{6|-d}.$

Anm. Wenn man in der obigen Gleichung (2) $m + n = p$, also $m = p - n$ setzt, so ergibt sich aus derselben

$$a^{p-n|d} = \frac{a^{p|d}}{(a+(p-n)d)^{n|d}}.$$

Will man diese Gleichung auch dann noch gelten lassen, wenn $p =$ oder $< n$ ist, jedoch unter der Bedingung, daß p und n ganze Zahlen sind, so lassen sich weiter aus derselben die folgenden Gleichungen ableiten. Nimmt man zunächst $p = n$ an, so erhält man

$$a^{0|d} = \frac{a^{n|d}}{a^{n|d}} = 1.$$

Setzt man ferner $p = 0$, so ergibt sich

$$a^{-n|d} = \frac{1}{(a-nd)^{n|d}} = \frac{1}{(a-d)^{n|-d}}.$$

Endlich bekommt man noch, wenn man $p - n = 1$ annimmt,

$$a^{1|d} = \frac{a^{n+1|d}}{(a+d)^{n|d}} = a.$$

§. 9. Der binomische Lehrsatz für Factoriellen.

Dieser Satz lautet

$$(a+b)^{n|d} = \begin{cases} a^{n|d} + n_1 a^{n-1|d} b + n_2 a^{n-2|d} b^{2|d} \\ \quad + n_3 a^{n-3|d} b^{3|d} \ldots + n_1 a b^{n-1|d} + b^{n|d}, \end{cases}$$

wo die für die Coefficienten angewendeten abgekürzten Zeichen $n_1, n_2, n_3 \ldots$ die in §. 4 angegebene Bedeutung haben.

Bew. Wenn wir zunächst $n = 1$ annehmen, so ist nach §. 7 übereinstimmend mit unserem Satze

$$(a+b)^{1|d} = a + b = a^{1|d} + b^{1|d}.$$

Setzen wir ferner $n = 2$, so erhalten wir

$$\begin{aligned}(a+b)^{2|d} &= (a+b)(a+b+d) \\ &= a[(a+d)+b] + b[a+(b+d)] \\ &= a(a+d) + 2ab + b(b+d),\end{aligned}$$

also $(a+b)^{2|d} = a^{2|d} + 2ab + b^{2|d},$

was ebenfalls mit dem obigen Satze übereinstimmt.

Multipliciren wir die linke Seite dieser Gleichung mit $a + b + 2d$, so erhalten wir

$$(a+b)^{2|d}(a+b+2d) = (a+b)^{3|d};$$

und multipliciren wir die einzelnen Glieder der rechten Seite jener Gleichung ebenfalls mit $a + b + 2d$, so bekommen wir weiter

$$\begin{aligned} a^{2|d}[(a+2d)+b] &= a^{3|d} + a^{2|d} b, \\ 2ab[(a+d)+(b+d)] &= 2a^{2|d} b + 2ab^{2|d}, \\ b^{2|d}[a+(b+2d)] &= ab^{2|d} + b^{3|d}. \end{aligned}$$

Ziehen wir nun bei der Addition die gleichnamigen, nur in den Coefficienten verschiedenen Glieder zusammen, so ergibt sich

$$(a + b)^{3|d} = a^{3|d} + 3a^{2|d}b + 3ab^{2|d} + b^{3|d},$$

gerade so wie der Lehrsatz es vorschreibt.

Multipliciren wir ferner noch in ähnlicher Weise, wie dies eben geschehen ist, diese Gleichung mit $a + b + 3d$, so bekommen wir auf der linken Seite

$$(a + b)^{3|d}(a + b + 3d) = (a + b)^{4|d}$$

und auf der rechten Seite

$$a^{3|d}[(a + 3d) + b] = a^{4|d} + a^{3|d}b,$$
$$3a^{2|d}b[(a + 2d) + (b + d)] = 3a^{3|d}b + 3a^{2|d}b^{2|d},$$
$$3ab^{2|d}[(a + d) + (b + 3d)] = 3a^{2|d}b^{2|d} + 3ab^{3|d},$$
$$b^{3|d}[a + (b + 3d)] = ab^{3|d} + b^{4|d}.$$

Demnach ist

$$(a + b)^{4|d} = a^{4|d} + 4a^{3|d}b + 6a^{2|d}b^{2|d} + 4ab^{3|d} + b^{4|d}.$$

Die vorstehenden Ableitungen werden ausreichen, um das Gesetz erkennen zu lassen, welches die einzelnen Glieder der entwickelten Factoriellen befolgen, so weit sie von a, b und d abhängen, so wie auch, daß dieses Gesetz auch für alle folgenden Factoriellen das nämliche bleiben muß.

In Hinsicht der Coefficienten aber zeigen die obigen Entwickelungen, daß dieselben sich für jede folgende Factorielle aus dem Coefficienten der vorhergehenden nach demselben Gesetze ergeben, welches wir oben in §. 6 für die Coefficienten der aufeinander folgenden Potenzen des Binomiums kennen gelernt haben. Da nun nach den vorstehenden Ableitungen die Coefficienten der Factoriellen für die Exponenten 1, 2, 3 und 4 mit denen der Potenzen übereinstimmen, so muß diese Uebereinstimmung auch für alle folgenden Exponenten stattfinden.

Anm. 1. Man kann auch leicht ganz allgemein zeigen, daß, wenn der obige Satz für irgend einen Exponenten n richtig ist, derselbe für den nächstfolgenden Exponenten $n + 1$ ebenfalls gelten muß. Multipliciren wir nämlich unter der angegebenen Voraussetzung, daß der binomische Satz der Factoriellen für den Exponenten n Giltigkeit hat, daß also die Gleichung

$$(a + b)^{n|d} = \begin{cases} a^{n|d} + n_1a^{n-1|d}b + n_2a^{n-2|d}b^{2|d} \\ \quad + n_3a^{n-3|d}b^{3-d} \ldots . + n_1ab^{n-1|d} + b^{n|d} \end{cases}$$

richtig ist, beide Seiten dieser Gleichung mit $(a + b + nd)$, so erhalten wir durch Multiplication der linken Seite

$$(a + b)^{n|d}(a + b + nd) = (a + b)^{n+1|d}$$

und durch Multiplication der einzelnen Glieder der rechten Seite

$$a^{n|d}(a + nd + b) = a^{n+1|d} + a^{n|d}b,$$
$$n_1a^{n-1|d}b[(a + (n-1)d) + (b + d)] = n_1a^{n|d}b + n_1a^{n-1|d}b^{2|d},$$
$$n_2a^{n-2|d}b^{2|d}[(a + (n-2)d) + (b + 2d)] = n_2a^{n-1|d}b^{2|d} + n_2a^{n-2|d}b^{3|d},$$
$$n_3a^{n-3|d}b^{3|d}[(a + (n-3)d) + (b + 3d)] = n_3a^{n-2|d} + n_3a^{n-3|d}b^{4|d}$$

u. s. w., endlich

$$n_1ab^{n-1|d}[(a + d) + (b + (n-1)d)] = n_1a^{2|d}b^{n-1|d} + n_1ab^{n|d}$$

und

$$b^{n|d}[a + (b + nd)] = ab^{n|d} + b^{n+1|d}.$$

Erinnern wir uns nun noch bei der Addition der einzelnen Glieder des vorstehenden Schemas des in §. 6 von den Binomialcoefficienten erwiesenen Satzes, so erhalten wir

$$(a+b)^{n+1|d} = \begin{cases} a^{n+1|d} + (n+1)_1 a^{n|d} b + (n+1)_2 a^{n-1|d} b^{2|d} \\ + (n+1)_3 a^{n-2|d} b^{3|d} \ldots\ldots (n+1)_1 ab^{n|d} + b^{n+1|d}. \end{cases}$$

Gilt daher unser Satz für den Exponenten n, so ist er auch für den Exponenten n + 1 richtig; er galt, wie oben gezeigt, für n = 1, für n = 2, für n = 3, für n = 4; er muß daher auch für n = 5 und folglich auch für n = 6, 7, 8, 9 ... gelten, überhaupt für jeden Werth von n, welcher eine ganze positive Zahl ist, richtig sein.

Anm. 2. Der binomische Lehrsatz der Potenzen ist offenbar nur ein specieller Fall des binomischen Lehrsatzes der Factoriellen, welcher aus diesem herausfällt, wenn man d = 0 setzt.

§. 10. Zusatz.

Wenn wir in der Gleichung des vorherg. §. d = — 1 setzen, so verwandelt sich dieselbe in

$$(a+b)^{n|-1} = \begin{cases} a^{n|-1} + n_1 a^{n-1|-1} b + n_2 a^{n-2|-1} b^{2|-1} + n_3 a^{n-3|-1} b^{3|-1} \ldots \\ + n_1 ab^{n-1|-1} + b^{n|-1}. \end{cases}$$

Dividiren wir die ganze Gleichung durch 1 . 2 . 3 . . . n, so erhalten wir auf der linken Seite

$$\frac{(a+b)^{n|-1}}{1.2.3\ldots n} = \frac{(a+b)(a+b-1)(a+b-2)\ldots(a+b-n+1)}{1.2.3\ldots n} = (a+b)_n,$$

wenn wir uns auch hier der in §. 4 angegebenen abgekürzten Bezeichnungsweise für die Binominalcoefficienten bedienen. Indem wir eben so auf der rechten Seite der obigen Gleichung die einzelnen Glieder durch 1 . 2 . 3 . . . n dividiren, bekommen wir

$$\frac{a^{n|-1}}{1.2\ldots n} = \frac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)}{1.2.3\ldots n} = a_n,$$

$$\frac{n_1 a^{n-1|-1} b}{1.2.3\ldots n} = \frac{na(a-1)(a-2)\ldots(a-n+2)b}{1.2.3\ldots n}$$

$$= \frac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+2)}{1.2.3\ldots(n-1)} \cdot \frac{b}{1} = a^{n-1} \cdot \frac{b}{1},$$

$$\frac{n_2 a^{n-2|-1} b^{2|-1}}{1.2.3\ldots n} = \frac{n(n-1)a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+3)b(b-1)}{1.2.1.2.3\ldots n}$$

$$= \frac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+3)}{1.2.3\ldots(n-2)} \cdot \frac{b(b-1)}{1.2}$$

$$= a^{n-2} \cdot b_2,$$

$$\frac{n_3 a^{n-3|-1} b^{3|-1}}{1.2.3\ldots n} = \frac{n(n-1)(n-2)a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+4)b(b-1)(b-2)}{1.2.3.1.2.3\ldots n}$$

$$= \frac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+4)}{1.2.3\ldots(n-3)} \cdot \frac{b(b-1)(b-2)}{1.2.3}$$

$$= a_{n-3} \cdot b_3$$

u. s. w.

Demnach erhalten wir

$$(a+b)_n = a_n + a_{n-1} b_1 + a_{n-2} b_2 + a_{n-3} b_3 \ldots + b_n.$$

Diese Gleichung, in welcher a und b beliebige positive oder negative, ganze oder gebrochene Zahlen sein können, n aber eine positive ganze Zahl bedeutet, wird der binomische Lehrsatz der Binomialcoefficienten genannt.

Anm. Derselbe ist darum von besonderer Wichtigkeit, weil auf ihm der Beweis der Allgemeingiltigkeit des binomischen Lehrsatzes der Potenzen (s. Cap. II., §. 52) beruht.

§. 11. Erklärung.

Man pflegt die Factorielle

$$1^{n|+1} = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (n-1)n = n^{n|-1}$$

auch kürzer auf diese Art

$$n!$$

zu schreiben und die Facultät n zu nennen.

Anm. Wir werden von dieser Abkürzung, da sie im Sprechen und im Schreiben nur geringe Vortheile gewährt, im Folgenden wenig Gebrauch machen. Auch bedarf es der Aufstellung besonderer Gesetze für die Facultäten nicht, da dieselben nur einen speciellern Fall der Factoriellen bilden.

Bemerkung. Wir haben in diesem Abschnitte häufig die Binomialcoefficienten

$$\frac{a}{1}, \quad \frac{a(a-1)}{1 \,.\, 2}, \quad \frac{a(a-1)(a-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} \text{ u. s. w.}$$

kürzer durch die Zeichen a_1, a_2, a_3 . . . ausgedrückt. Im Folgenden werden diese Zeichen mehrfach in anderer Bedeutung, ohne daß dabei an Binomialcoefficienten gedacht wird, gebraucht werden, z. B. um überhaupt das erste, zweite, dritte Glied einer Reihe oder den Coefficienten eines Gliedes anzuzeigen, welches zum Factor x, x^2, x^3 . . . hat. Um Verwechselungen zu vermeiden, werden wir uns nur der Buchstaben m und n mit angehängten Kennziffern zur Bezeichnung von Binomialcoefficienten bedienen, und dies wird entweder in der Regel noch besonders hervorgehoben werden oder sich aus dem Zusammenhange ergeben, daß unter m_1, m_2, m_3 . . . und n_1, n_2, n_3 . . . Binomialcoefficienten verstanden werden sollen.

Dritter Abschnitt.

Von den arithmetischen Reihen höherer Ordnung.

§. 12. Erklärung.

Wenn man in einer Reihe von ganz beliebigen Zahlen von der ersten die zweite, von der zweiten die dritte u. s. w. subtrahirt, so bilden die entstandenen Differenzen die erste Differenzreihe der ursprünglich gegebenen Reihe; verfährt man ganz auf dieselbe Weise mit den Gliedern dieser ersten Differenzreihe, so erhält man die zweite Differenzreihe; aus dieser leitet man dann auf gleiche Weise die dritte Differenzreihe ab u. s. w. Das folgende Beispiel enthält in der ersten Zeile eine willkürliche Reihe, in der zweiten ihre erste Differenzreihe, in der folgenden die zweite Differenzreihe u. s. w.:

5 7 2 9 10 20
2 −5 7 1 10
−7 12 −6 9
19 −18 15
−37 33
70.

§. 13. Zusatz.

Das nte Glied irgend einer Reihe ist allemal gleich der Summe aus dem Anfangsgliede und den n — 1 ersten Gliedern der ersten Differenzreihe.

Bew. Denn ist die gegebene Reihe

A, B, C, D, E, F . . .,

so ist die dazu gehörige erste Differenzreihe

B—A, C—B, D—C, E—D, F—E . . . .

Hiernach wird jedes Glied der ursprünglichen Reihe erhalten, wenn man zum Anfangsgliede die vorangehenden Glieder der Differenzreihe addirt; denn es ist

$$B = A + (B - A),$$
$$C = A + (B - A) + (C - B),$$
$$D = A + (B - A) + (C - B) + (D - C),$$
$$E = A + (B - A) + (C - B) + (D - C) + (E - D) \text{ u. s. w.}$$

So ist z. B. in der Reihe des vorhergehenden §. das 6te Glied $20 = 5 + 2 - 5 + 7 + 1 + 10$.

§. 14. Erklärung.

Eine Reihe, deren erste Differenzreihe lauter gleiche Glieder hat, heißt (in Uebereinstimmung mit §. 244 der Arithmetik) eine arithmetische Reihe der ersten Ordnung; eine Reihe, welche zur ersten Differenzreihe eine Reihe der ersten Ordnung hat, deren zweite Differenzreihe also lauter gleiche Glieder hat, heißt eine arithmetische Reihe der zweiten Ordnung u. s. f. Ueberhaupt heißt eine Reihe der nten Ordnung diejenige, deren erste Differenzreihe von der n — 1ten Ordnung ist, und die folglich in der nten Differenzreihe lauter gleiche Glieder hat.

Anm. Beispiele arithmetischer Reihen der verschiedenen Ordnung liefern die figurirten Zahlenreihen. — Ein anderes Beispiel einer Reihe erster Ordnung ist die folgende Reihe, welcher wir zugleich die erste Differenzreihe beigefügt haben:

3 9 15 21 27 33
6 6 6 6 6

Ueberhaupt ist eine arithmetische Reihe erster Ordnung nichts anders, als was wir früher kurzweg eine arithmetische Reihe genannt haben. Eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung nebst den zugehörigen Differenzreihen ist folgende:

2 5 10 17 26 37 50
3 5 7 9 11 13
2 2 2 2 2

Eine Reihe dritter Ordnung nebst den zugehörigen Differenzreihen ist folgende:

4 12 15 3 −34 −106
8 3 −12 −37 −72
−5 −15 −25 −35
−10 −10 −10

Eine Reihe der ersten Ordnung ist hinreichend bestimmt, wenn man von derselben die beiden ersten Glieder, eine Reihe der zweiten Ordnung, wenn man die drei ersten Glieder, eine Reihe der dritten Ordnung, wenn man die vier ersten Glieder kennt u. s. w. Man findet nämlich bei einer Reihe der ersten Ordnung jedes folgende Glied, wenn man zum vorhergehenden die beständige Differenz addirt. Sind von einer Reihe der zweiten Ordnung die drei ersten Glieder gegeben, so sucht man zuerst die beiden ersten Glieder der ersten Differenzreihe, welche man, da diese eine Reihe erster Ordnung ist, in der eben angegebenen Art fortsetzt. Man findet nun das vierte Glied der gesuchten Reihe, wenn man zum dritten Glied derselben das dritte Glied der ersten Differenzreihe addirt; eben so erhält man das fünfte Glied der gesuchten Reihe, wenn man zum vierten Gliede derselben das vierte Glied der ersten Differenzreihe addirt u. s. w.

In ähnlicher Art wird eine Reihe dritter Ordnung dargestellt, indem man erst ihre dritte, dann ihre zweite, ferner ihre erste Differenzreihe bildet und die Glieder der ersten Differenzreihe zu den Gliedern der gesuchten Reihe addirt. Sind z. B. von einer Reihe der zweiten Ordnung die ersten drei Glieder = 8, 12, 18 und von einer Reihe der dritten Ordnung die vier ersten Glieder 15, 10, 1, — 9 gegeben, so ist das Schema der Rechnung zur Darstellung dieser Reihen folgendes:

Reihe zweiter Ordnung.

Zweite Differenz-Reihe.	Erste Differenz-Reihe.	Gesuchte Reihe.
2	4	8
2	6	12
2	8	18
2	10	26
2	12	36
2	14	48
2	16	62
2	18	78
2	20	96
2	22	116
	24	138
		162

Reihe dritter Ordnung.

Dritte Differenz-Reihe.	Zweite Differenz-Reihe.	Erste Differenz-Reihe.	Gesuchte Reihe.
+ 3	— 4	— 5	15
3	— 1	— 9	10
3	+ 2	— 10	1
3	5	— 8	— 9
3	8	— 3	— 17
3	11	+ 5	— 20
3	14	16	— 15
3	17	30	+ 1
3	20	47	31
	23	67	78
		90	145
			235

Zur Uebung können folgende Beispiele dienen:

1) Von einer Reihe zweiter Ordnung sind die drei ersten Glieder gleich 9, 13 und 21 gegeben; man soll die Reihe bis zum 12ten Gliede darstellen.

Aufl. 9, 13, 21, 33, 49, 69, 93, 121, 153, 189, 229, 273, 321.

2) Dieselbe Aufgabe für eine Reihe dritter Ordnung, wenn die vier ersten Glieder gleich 8, 9, 12 und 22 gegeben sind.

Aufl. 8, 9, 12, 22, 44, 83, 144, 232, 352, 509, 708, 954.

3) Dieselbe Aufgabe für eine Reihe dritter Ordnung, wenn die vier ersten Glieder gleich 64, 88, 110 und 127 gegeben sind.

Aufl. 64, 88, 110, 127, 136, 134, 118, 85, 32, —44, —146, —277.

Wenn man für die Reihe der auf einander folgenden

Quadratzahlen	1	4	9	16	25	36	49 . . .
die Differenzreihen	3	5	7	9	11	13 . . .	
	2	2	2	2	2 . . .		

herstellt, so findet man, daß die Quadratzahlen eine Reihe zweiter Ordnung bilden. Man kann dieses auch leicht ganz allgemein erweisen. Bezeichnet nämlich n

eine beliebige Zahl, so erhält man für drei auf einander folgende Quadratzahlen nebst den zugehörigen Differenzreihen das Schema

	Erste Differenzreihe.	Zweite Differenzreihe.
$n^2 = n^2$		
$(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$	$2n + 1$	2
$(n + 2)^2 = n^2 + 4n + 4$	$2n + 3$	

Da hiernach die zweite Differenzreihe von n ganz unabhängig ist, kein anderes, als das constante Glied 2 enthält, welchen Werth man auch n beilegen mag, so bilden folglich die Quadratzahlen eine Reihe zweiter Ordnung. Eben so läßt sich leicht zeigen, daß die Kubikzahlen eine Reihe dritter Ordnung bilden. Man kann diesen Umstand mit großem Vortheil bei der Anfertigung von Tafeln der Quadrat- und Kubikzahlen benutzen. Wir wollen, um dieses vor Augen zu stellen, annehmen, man habe diese Tafeln bereits bis zu irgend einer Zahl ausgearbeitet, und dann zeigen, wie die Tafeln, anschließend an die zwei oder drei vorangehenden Quadrat- oder Kubikzahlen, bequem fortzusetzen sind.

Zweite Differenz-Reihe.	Erste Differenz-Reihe.	Quadratzahl.	Einfache Zahl.
2	111	3025	55
2	113	3136	56
2	115	3249	57
2	117	3364	58
2	119	3481	59
	121	3600	60
		3721	61

u. s. w.

Dritte Differenz-Reihe.	Zweite Differenz-Reihe.	Erste Differenz-Reihe.	Kubikzahl.	Einfache Zahl.
6	348	9919	185193	57
6	354	10267	195112	58
6	360	10621	205379	59
6	366	10981	216000	60
6	372	11347	226981	61
	378	11719	238328	62
		12097	250047	63
			264144	64

u. s. w.

Dasselbe Verfahren findet überhaupt Anwendung bei der Berechnung von Tafeln, deren Glieder arithmetische Reihen irgend einer Ordnung bilden, so z. B. bei der Berechnung von Tafeln, welche zu der gegebenen Größe des Radius den Umfang und Flächeninhalt eines Kreises oder zu der gegebenen Größe des Radius den Umfang, die Oberfläche und den körperlichen Inhalt einer Kugel liefern; denn es verhalten sich die Umfänge und die Flächeninhalte zweier Kreise wie die Radien und die Quadrate der Radien, und die Umfänge, Oberflächen und körperlichen Inhalte zweier Kugeln verhalten sich wie die Radien, die Quadrate der Radien und die Kuben derselben u. dgl. m.

§. 15. Lehrsatz.

Bezeichnen wir mit a_1 das erste Glied einer arithmetischen Reihe der ersten Ordnung, ferner mit d' das beständige Glied ihrer ersten Differenzreihe, mit a_n das nte Glied der arithmemetischen Reihe erster Ordnung und mit s_n die Summe ihrer n ersten Glieder, so ist $a_n = a_1 + (n - 1)d'$

und
$$s_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{1.2}d'.$$

Bew. Die erste Gleichung ist an sich klar und überdies schon in §. 245 der Arithmetik mitgetheilt worden; nach demselben §. ist

$$s_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2},$$

oder wenn wir den Werth von a_n einsetzen

$$s_n = \frac{n(2a_1 + (n-1)d')}{2} = na_1 + \frac{n(n-1)d'}{1\,.\,2}.$$

§. 16. Lehrsatz.

Bezeichnen wir mit a_1 das erste Glied einer arithmetischen Reihe der zweiten Ordnung, ferner mit a_n das nte Glied und s_n die Summe der n ersten Glieder dieser Reihe und mit d' und d'' die Anfangsglieder der ersten und zweiten Differenzreihe, so ist

$$a_n = a_1 + (n-1)d' + \frac{(n-1)(n-2)}{1\,.\,2}d''$$

und
$$s_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}d' + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}d''.$$

Bew. Das nte Glied wird nach §. 13 erhalten, wenn man zum Anfangsgliede a_1 die $n-1$ ersten Glieder der ersten Differenzreihe addirt; diese Differenzreihe ist eine Reihe der ersten Ordnung mit dem Anfangsgliede d' und dem beständigen Differenzgliede d'', die Summe ihrer $n-1$ ersten Glieder ist daher nach dem vorhergehenden §.

$$(n-1)d' + \frac{(n-1)(n-2)}{1\,.\,2}d''.$$

Demnach ist das nte Glied

$$a_n = a_1 + (n-1)d'' + \frac{(n-1)(n-2)}{1\,.\,2}d''.$$

Die Summe der Reihe ist:

$$s_n = \left\{\begin{array}{l} a_1 \\ + a_1 + d' \\ + a_1 + 2d' + d'' \\ + a_1 + 3d' + 3d'' \\ + a_1 + 4d' + 6d'' \\ \;\;\cdots\cdots\cdots \\ \;\;\cdots\cdots\cdots \\ \;\;\cdots\cdots\cdots \\ + a_1 + (n-1)d' + \frac{(n-1)(n-2)}{1\,.\,2}d''; \end{array}\right.$$

also

$$s_n = na_1 + (1+2+3\ldots+n-1)d' + \left(1+3+6+\ldots\frac{(n-1)(n-2)}{1\,.\,2}\right)d''.$$

Der Coefficient von d' ist die Summe der $n-1$ ersten natürlichen Zahlen, also die $n-1$te Zahl der zweiten Ordnung und daher $= \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}$. Der Coefficient von d'' ist die Summe der $n-2$ ersten Zahlen der zweiten Ordnung, folglich die $n-2$te Zahl der dritten Ordnung $= \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}$. Hierdurch verwandelt sich die vorhergehende Gleichung in:

$$s_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}d' + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}d''.$$

§. 17. Zusatz.

Ganz auf demselben Wege findet man für eine Reihe der **dritten** Ordnung, wenn d', d'' und d''' die Anfangsglieder der ersten, zweiten und dritten Differenzreihe bezeichnen,

$$a_n = a_1 + (n-1)d' + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \,.\, 2}d'' + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}d'''$$

und

$$s_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{1 \,.\, 2}d' + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}d'' + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4}d'''.$$

Auch ergibt sich aus dem Vorhergehenden wohl hinreichend deutlich, wie für eine Reihe von der 4ten oder einer noch höheren Ordnung das allgemeine Glied und die Summe der Reihe auszudrücken sein würde.

Zur **Uebung** können folgende **Beispiele** dienen:

1) Von einer Reihe der zweiten Ordnung ist das erste Glied $a_1 = 4$, das erste Glied der ersten Differenzreihe $d' = 5$ und das beständige Glied der zweiten Differenzreihe $d'' = 3$ gegeben; wie groß ist das 16te Glied und die Summe der 16 ersten Glieder dieser Reihe? — Antw. 394 und 2344.

2) Wie groß ist das 12te Glied und die Summe der 12 ersten Glieder einer Reihe der dritten Ordnung, wenn das erste Glied dieser Reihe gleich 7 und die Anfangsglieder der ersten, zweiten und dritten Differenzreihe beziehlich gleich 6, — 2 und + 1 gegeben sind? — Antw. 128 und 535.

3) Wie groß ist die Summe der n ersten Quadratzahlen?

Antw. $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$.

4) Wie groß ist die Summe der n ersten Kubikzahlen?

Antw. $\left(\dfrac{n(n+1)}{1 \,.\, 2}\right)^2$.

Die Auflösungen der Aufgaben (3) und (4) sind zwar schon früher in der Arithmetik (§. 254) mit Hilfe der Formeln für die figurirten Zahlen erhalten worden; es dürfte aber eine nützliche Uebung gewähren, dieselben Aufgaben nochmals mit Benutzung der allgemeineren Sätze und Formeln für die arithmetischen Reihen zu lösen.

§. 18. Lehrsatz.

Eine arithmetische Reihe der ersten Ordnung ist vollständig bestimmt, wenn von derselben irgend zwei Glieder, eine Reihe der zweiten Ordnung, wenn von derselben drei Glieder, überhaupt eine Reihe der pten Ordnung, wenn von derselben p + 1 Glieder gegeben sind.

Bew. Durch die p + 1 gegebenen Glieder ist man in den Stand gesetzt, p + 1 einfache Gleichungen zwischen den p + 1 Buchstaben a_1, d', d'', d''' ... zu bilden. Sind aber diese gefunden, so läßt sich auch jedes beliebige Glied der Reihe und die ganze Reihe leicht darstellen.

Es sei z. B. von einer Reihe der dritten Ordnung gegeben:

das erste Glied $a_1 = 18$,
das fünfte Glied $a_5 = -62$,
das achte Glied $a_8 = 550$,
das zehnte Glied $a_{10} = 1638$,

so hat man nach §. 17 die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
1)\quad a_1 &= 18,\\
2)\quad -62 &= 18+4d'+\ 6d''+\ 4d''',\\
3)\quad 550 &= 18+7d'+21d''+35d''',\\
4)\quad 1638 &= 18+9d'+36d''+84d''',
\end{aligned}$$

oder nach einigen Abkürzungen

$$\begin{aligned}
2)\quad -40 &= 2d'+\ 3d''+\ 2d''',\\
3)\quad 76 &= d'+\ 3d''+\ 5d''',\\
4)\quad 540 &= 3d'+12d''+28d'''.
\end{aligned}$$

Eliminirt man d', so erhält man

$$\begin{aligned}
(2,\ 3)\quad 192 &= 3d''+\ 8d''',\\
(3,\ 4)\quad 312 &= 3d''+13d''',
\end{aligned}$$

und hieraus $d''' = 24,\ d'' = 0,\ d' = -44.$

Demnach ist das allgemeine Glied der Reihe

$$a_n = 18 - (n-1)\,.\,44 + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3}\,.\,24.$$

§. 19. Erklärung.

Zwischen den auf einander folgenden Gliedern einer Reihe, 1, 2, 3 ... Glieder **interpoliren**, heißt eine neue Reihe so bilden, daß die bisher unmittelbar auf einander folgenden Glieder durch 1, 2, 3 ... eingeschaltete Glieder von einander getrennt werden und die neu entstandene Reihe das nämliche Gesetz befolgt, wie die ursprünglich gegebene, (also, wenn diese eine arithmetische ist, derselben Ordnung wie diese angehört).

Anm. Wenn zwischen je zwei auf einander folgenden Gliedern einer Reihe **ein** Glied eingeschaltet wird, so nimmt das

1., 2., 3., 4.... Glied

der ursprünglichen Reihe in der neuen Reihe die

1., 3., 5., 7.... Stelle

ein. Werden 2 Glieder eingeschaltet, so verwandelt sich das

1., 2., 3., 4.... Glied

in das 1., 4., 7., 10.... Glied.

Werden überhaupt p Glieder interpolirt, so verwandelt sich das

1., 2., 3., 4.... Glied

in das 1., $p+2.$, $2p+3.$, $3p+4.$ ... Glied.

§. 20. Zusatz.

Durch die vorhergehende Aufgabe ist zugleich diese gelöst, zwischen den Gliedern einer arithmetischen Reihe irgend einer Ordnung eine bestimmte Anzahl Glieder zu interpoliren.

Anm. 1. Man macht von der Interpolationsmethode nützlichen Gebrauch bei naturwissenschaftlichen Beobachtungen, wenn das Gesetz, nach welchem eine in bestimmten Intervallen beobachtete veränderliche Größe fortschreitet, nicht genauer bekannt ist. Angenommen, man habe die Lufttemperatur beobachtet des Morgens

um 9 Uhr 12,4 Grad,
„ 10 „ 15,9 „
„ 11 „ 18,1 „

und man wollte hieraus mit möglichster Wahrscheinlichkeit die Lufttemperatur um $10\frac{1}{2}$ Uhr ableiten. Der Anblick der vorstehenden Zahlen läßt sofort erkennen, daß die Temperatur in der zweiten Stunde nicht in gleichem Maße gewachsen ist, wie in der ersten, und dies läßt als höchst wahrscheinlich annehmen, daß auch die Temperatur um $10\frac{1}{2}$ Uhr nicht das Mittel zwischen den Temperaturen um 10 und 11 Uhr bilden, sondern von der erstern sich um mehr, als von der letztern unterscheiden wird. Da nun das Gesetz, nach welchem die Lufttemperatur während eines Tages sich ändert, nicht bekannt ist, so wird man am zweckmäßigsten dasselbe durch eine arithmetische Reihe und zwar, da hier drei Beobachtungen vorliegen, durch eine Reihe zweiter Ordnung darzustellen suchen. Da ferner die Temperatur um $10\frac{1}{2}$ Uhr gefunden werden soll, so wird man die beobachtete Temperatur als das erste, dritte und fünfte Glied, die gesuchte Temperatur aber als das vierte Glied einer arithmetischen Reihe zweiter Ordnung ansehen und dem gemäß die folgenden Gleichungen aufstellen

$$12{,}4 = a_1,$$
$$15{,}9 = a_3 = a_1 + 2d' + d''$$
und
$$18{,}1 = a_5 = a_1 + 4d' + 6d''.$$

Durch Auflösung dieser Gleichungen ergibt sich, wenn wir uns auf die beiden ersten Decimalstellen beschränken,

$$d' = +1{,}91 \text{ und } d'' = -0{,}32.$$

Indem wir nun die gesuchte Temperatur als das vierte Glied der Reihe ausdrücken, finden wir $a_4 = a_1 + 3d' + 3d'' = 17{,}17,$
wofür wir zweckmäßiger $17{,}2$
setzen, da die Genauigkeit der zu Grunde liegenden Beobachtungen auch die erste Decimalstelle nicht übersteigt.

Anm. 2. Von den arithmetischen Reihen der verschiedenen Ordnungen gelten noch folgende Gesetze:

1) Wenn man zu den Gliedern einer Reihe der pten Ordnung die gleich hohen Glieder einer Reihe der qten Ordnung addirt oder diese von jenen subtrahirt und $p \gtreqless q$ ist, so sind die entstandenen Summen oder Differenzen die Glieder einer arithmetischen Reihe der pten Ordnung.

Es sei z. B. das allgemeine Glied einer Reihe der dritten Ordnung

$$a_n = a_1 + (n-1)d' + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2}d'' + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}d''',$$

oder wenn wir der Kürze wegen

$$n - 1 = (n-1)_1$$
$$\frac{(n-1) \cdot (n-2)}{1 \cdot 2} = (n-1)_2$$
$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = (n-1)_3$$

setzen, $a_n = a_1 + (n-1)_1 d' + (n-1)_2 d'' + (n-1)_3 d'''$
und das allgemeine Glied einer Reihe der zweiten Ordnung

$$\alpha_n = \alpha_1 + (n-1)_1 \delta' + (n-1)_2 \delta'',$$

so ist

$$a_n \pm \alpha_n = (a_1 \pm \alpha_1) + (n-1)_1 (d' \pm \delta') + (n-1)_2 (d'' \pm \delta'') + (n-1)_3 d'''.$$

Dieser Ausdruck ist aber offenbar dem allgemeinen Gliede einer Reihe der dritten Ordnung gleich, welche zum ersten Gliede $a_1 \pm \alpha_1$, und zu Anfangsgliedern der ersten, zweiten und dritten Differenzreihe beziehlich $d' \pm \delta'$, $d'' \pm \delta''$ und d''' hat.

2) Wenn man alle Glieder einer arithmetischen Reihe irgend einer Ordnung mit derselben Zahl multiplicirt, so bilden die Producte eine Reihe derselben Ordnung, wie die gegebene.

Denn ist z. B. eine Reihe der zweiten Ordnung gegeben, deren allgemeines Glied

$$a_n = a_1 + (n-1)_1 d' + (n-1)_2 d''$$

ist, und man multiplicirt dieses mit einer unveränderlichen Zahl α, so ist das Product

$$a_n\alpha = a_1\alpha + (n-1)_1 d'\alpha + (n-1)_2 d''\alpha$$

offenbar das allgemeine Glied einer Reihe der zweiten Ordnung mit dem Anfangsgliede $a_1\alpha$ und den Anfangsgliedern der Differenzreihen $d'\alpha$ und $d''\alpha$.

3) Wenn man jedes Glied einer Reihe der pten Ordnung mit dem ebensovielten Gliede einer Reihe der ersten Ordnung, (das erste Glied mit dem ersten, das zweite mit dem zweiten u. s. f.), multiplicirt, so bilden die Producte eine Reihe der p + 1ten Ordnung.

Es sei z. B. eine Reihe der dritten Ordnung gegeben und ihr allgemeines Glied

$$a_n = a + (n-1)_1 d' + (n-1)_2 d'' + (n-1)_3 d''';$$

das allgemeine Glied der Reihe der ersten Ordnung sei

$$\alpha_n = \alpha + (n-1)\delta;$$

dann ist

$$a_n\alpha_n = a_n\alpha + a_n(n-1)\delta.$$

Der erste Summand $a_n\alpha$ ist nach (2) das allgemeine Glied einer Reihe der dritten Ordnung; der zweite Summand ist

$$a_n(n-1)\delta =$$
$$= \delta[(n-1)a + (n-1)(n-1)_1 d' + (n-1)(n-1)_2 d'' + (n-1)(n-1)_3 d'''].$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned}
(n-1)a &= (n-1)a,\\
(n-1)(n-1)_1 d' &= (1+n-2).(n-1)\,d' = (n-1)\,.\,d' + (n-1)_2.2d',\\
(n-1)(n-1)_2 d'' &= (2+n-3).(n-1)_2 d'' = (n-1)_2.2d'' + (n-1)_3\,3d'',\\
(n-1)(n-1)_3 d''' &= (3+n-4).(n-1)_3 d''' = (n-1)_3.3d''' + (n-1)_4.4d'''.
\end{aligned}$$

Demnach ist

$$a_n(n-1)\delta =$$
$$= \delta\,.\,[(n-1)(a+d') + (n-1)_2\,.\,2(d'+d'') + (n-1)_3\,.\,3(d''+d''') + (n-1)_4\,.\,4d'''].$$

Der eingeschlossene Factor ist offenbar das allgemeine Glied einer Reihe der vierten Ordnung mit dem Anfangsgliede Null und den Anfangsgliedern der auf einander folgenden Differenzreihen $a + d'$, $2(d' + d'')$, $3(d'' + d''')$, $4d'''$. Es gehört daher auch das Product dieses Factors in δ oder der Summand $a_n(n-1)\delta$ nach (2) einer Reihe der vierten Ordnung an, und dasselbe gilt folglich auch, da der andere Summand $a_n\alpha$ eine Reihe der dritten Ordnung war, vermöge (1) von dem vollständigen Product $a_n\,.\,\alpha_n$.

4) Wenn man jedes Glied einer Reihe der pten Ordnung mit dem ebensovielten Gliede einer Reihe der qten Ordnung multiplicirt, so bilden die Producte eine Reihe der (p+q)ten Ordnung.

Es sei eine Reihe der vierten und eine Reihe der dritten Ordnung gegeben; das allgemeine Glied der ersten sei a_n, das der zweiten

$$\alpha_n = \alpha + (n-1)_1\delta + (n-1)_2\delta'' + (n-1)_3\delta'''.$$

Dann ist

$$a_n\alpha_n = a_n[\alpha + (n-1)\delta] + a_n(n-1)_2\delta'' + a_n(n-1)_3 d'''.$$

Nun ist der erste Summand $a_n[\alpha + (n-1)\delta]$ nach (3) das allgemeine Glied einer Reihe der fünften Ordnung; der zweite Summand

$$a_n (n-1)_2 \delta'' = a_n \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} \delta''$$

kann erhalten werden, wenn man a_n zuerst mit $n-1$ und das Product mit $(n-2)\frac{\delta''}{2}$ multiplicirt; da jeder dieser beiden Factoren einer Reihe der ersten Ordnung angehört, so gehört das erste Product nach (3) einer Reihe der fünften und das vollständige Product einer Reihe der sechsten Ordnung an. — Endlich läßt sich der Summand

$$a_n (n-1)_3 \delta''' = a_n \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \delta'''$$

erzeugen, wenn man zunächst a_n mit $\frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2}\delta'''$ multiplicirt und das Product, welches nach dem eben Bewiesenen das allgemeine Glied einer Reihe der sechsten Ordnung bildet, mit $(n-3)\frac{\delta'''}{3}$ multiplicirt. Da dieser Factor als allgemeines Glied einer Reihe der ersten Ordnung angesehen werden kann, so gehört das Product einer Reihe der siebenten Ordnung an. — Da nun von den besprochenen Summanden der erste einer Reihe der fünften, der zweite einer Reihe der sechsten und der letzte einer Reihe der siebenten Ordnung angehört, so ist nach (1) auch ihre Summe oder das Product der allgemeinen Glieder der gegebenen Reihen, deren eine von der dritten, die andere von der vierten Ordnung war, das allgemeine Glied einer Reihe der $3 + 4$ten $=$ 7ten Ordnung. — Hieraus folgt leicht weiter:

5) Wenn man die Glieder einer Reihe der ersten Ordnung mit einer ganzen Zahl p potenzirt, so erhält man eine Reihe der pten Ordnung, und

6) wenn man die Glieder einer Reihe der mten Ordnung mit einer ganzen Zahl p potenzirt, so bilden die Potenzen die Glieder einer Reihe der m.pten Ordnung.

Zweites Kapitel.

Die algebraische Analysis.

Erster Abschnitt.

Von den ganzen Functionen nebst den einfachsten und wichtigsten Sätzen aus der Lehre von den höhern Gleichungen.

A. Von den Functionen im allgemeinen.

§. 1. Erklärung.

Wenn eine Zahl y durch mehrere andere Zahlen a, b, c . . . in der Art bestimmt wird, daß wenn eine dieser Zahlen, welche es auch sei, ihren Werth verändert, im allgemeinen auch y einen andern Werth erhält, so nennt man die Zahl y eine Function der Zahlen a, b, c . . .

So ist z. B. die Summe $a + b$ eine Function der beiden Summanden a und b, der Bruch $\frac{a}{b}$ eine Function des Zählers a und des Nenners b, die Summe einer geometrischen Reihe $s = \frac{a(e^n - 1)}{e - 1}$ eine Function des Anfangsgliedes a, des Exponenten e und der Anzahl der Glieder n; u. dgl. m.

Die allgemeine Lehre von den Functionen hat besonders die Frage zu ihrem Gegenstande, welche Aenderung ihres Werthes eine Function erfährt, wenn die Zahlen, von denen sie abhängt, ihre Werthe ändern. Um indeß diese Untersuchung zu vereinfachen, nimmt man in den meisten Fällen nur eine der Zahlen, welche die Function bestimmen, als veränderlich an und denkt sich, daß die übrigen Zahlen sämmtlich ihre Werthe beibehalten. Jene Zahl nun, welcher man verschiedene Werthe beizulegen beabsichtigt, nennt man die Variable oder Veränderliche und bezeichnet dieselbe gewöhnlich durch einen der letzten Buchstaben des Alphabets, während man die Zahlen, welche als unveränderlich gedacht werden, die Constanten oder Beständigen nennt und dieselben durch die ersten Buchstaben des Alphabets auszudrücken pflegt.

Bei der Benennung einer Function berücksichtigt man allein die Veränderliche, welche sie enthält. — So ist z. B. der Bruch $\frac{a}{x}$, wenn der Zähler a als beständig angenommen ist, eine Function des Nenners x, ferner die Potenz a^x, wenn a eine unveränderliche absolute Zahl bezeichnet, eine Function des Exponenten x; u. dgl. m.*)

---

*) So oft in den nächsten Sätzen Potenzen vorkommen, hat man sich die Dignanden als absolute ganze oder gebrochene Zahlen zu denken.

§. 2. Erklärung.

Wenn eine Veränderliche oder eine Function derselben sich einer bestimmten Zahl in der Art nähert, daß zuletzt ihr Unterschied von der bestimmten Zahl kleiner werden kann, als jede noch so klein gegebene Zahl, so sagt man, dieselbe nähere sich der bestimmten Zahl als Grenze.

So nähert sich z. B. der Bruch

$$\frac{x - 1}{x + 1},$$

wenn man x fortwährend und über jede Grenze hinaus wachsen läßt, der Einheit als Grenze; denn die Differenz

$$1 - \frac{x - 1}{x + 2} = \frac{2}{x + 1}$$

kann so klein werden, als man immer will, wenn man x hinreichend groß annimmt.

Wenn man sich ferner eine Veränderliche — abgesehen vom Vorzeichen — in der Art abnehmend denkt, daß dieselbe kleiner werden kann, als jede noch so klein gegebene Zahl, so sagt man, die Veränderliche werde unendlich klein. — Eine Veränderliche dieser Art hat Null zur Grenze. Läßt man dagegen eine Veränderliche in der Art wachsen, daß dieselbe zuletzt größer werden kann, als jede noch so große, bestimmt gegebene Zahl, so sagt man, die Veränderliche werde unendlich groß. — Das unendlich Große bezeichnet man mit ∞.

Anm. Es kann aber auch geschehen, daß eine Veränderliche fortwährend wächst oder abnimmt, ohne unendlich groß oder unendlich klein zu werden; die Veränderliche kann nämlich in beiden Fällen sich irgend einer bestimmten Zahl als Grenze unendlich nähern. — So wachsen zwar z. B. die Glieder der Reihe der natürlichen Zahlen

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5 \ldots.$$

in der That fortwährend und in's Unendliche, und die Glieder der folgenden Reihe von Brüchen

$$\tfrac{1}{1},\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{5} \ldots.$$

die zum Zähler die Einheit, zum Nenner die natürlichen Zahlen haben, nehmen fortwährend und in's Unendliche ab. Dagegen aber nehmen in den beiden folgenden Reihen

$$\tfrac{1}{2},\ \tfrac{2}{3},\ \tfrac{3}{4},\ \tfrac{4}{5},\ \tfrac{5}{6} \ldots.$$

und

$$\tfrac{2}{1},\ \tfrac{3}{2},\ \tfrac{4}{3},\ \tfrac{5}{4},\ \tfrac{6}{5} \ldots.$$

die Glieder der ersten fortwährend zu, die der andern fortwährend ab; aber die einen werden eben so wenig unendlich groß, als die andern unendlich klein, vielmehr nähern sich die Glieder beider Reihen der Einheit als Grenze.

§. 3. Zusatz.

Die folgenden Functionen

$$a + x,\ ax,\ x^m$$

wo m als positiv gedacht wird, werden offenbar sämmtlich unendlich groß oder unendlich klein, wenn man in denselben x unendlich groß oder unendlich klein annimmt. Anders verhält es sich jedoch mit der Function

$$a^x$$

Bei derselben haben wir wesentlich zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem $a >$ oder < 1 ist. Im ersten Falle wird die Function a^x, wenn x un=

endlich groß angenommen wird, ebenfalls unendlich groß, im andern Falle dagegen unendlich klein. Ist nämlich zunächst $a > 1$, z. B.

$$a = 1 + z,$$

wo z eine (beliebig kleine oder große) positive Zahl bedeutet, so ist nach dem binomischen Lehrsatz (Arithm. §. 271)

$$a^x = (1 + z)^x = 1 + xz + \frac{x(x-1)}{1.2}z^2 + \ldots,$$

also jedenfalls $a^x > x . z$

und folglich für $x = \infty$ auch $a^x = \infty$.

Ist dagegen $a < 1$,

so ist $$a^x = \frac{1}{(1 : a)^x}.$$

Da nun nach der Annahme $1 : a > 1$ ist, so wird zufolge des Vorhergehenden in dem vorstehenden Bruche der Nenner $(1 : a)^x \infty$, wenn wir $x = \infty$ setzen, also der Bruch selbst und folglich auch a^x unendlich klein.

Anm. 1. Wir haben uns in dem obigen Beweise auf den binomischen Lehrsatz bezogen, der früher in der Arithmetik nur für ganze positive Exponenten erwiesen worden ist. Daß aber unsere Schlußfolge auch dann noch richtig bleibt, wenn unter x eine unendlich große gebrochene Zahl verstanden werden sollte, geht leicht aus §. 235 der Arithmetik hervor, wenn man sich diese Zahl in einen ächten Bruch und eine unendlich große ganze Zahl zerfällt denkt.

Anm. 2. Wenn x in der Function a^x unendlich klein angenommen wird, so nähert sich dieselbe der Grenze 1, wie aus der weiter unten (§. 51) auszuführenden Entwicklung dieser Function in eine unendliche Reihe hervorgeht.

§. 4. Zusatz.

Wenn die Glieder einer algebraischen Summe sämmtlich unendlich klein werden, so nimmt die Summe selbst in's Unendliche ab.

Beweis. Denn gesetzt die Summe habe m Glieder und — was der schlimmste Fall ist — diese seien insgesammt positiv oder sämmtlich negativ, ferner sei ε eine beliebig kleine Zahl; dann wird doch zufolge der Voraussetzung, daß sämmtliche Glieder in's Unendliche abnehmen sollen, zuletzt jedes Glied $< \frac{1}{m}\varepsilon$, also die Summe aller $< \varepsilon$, d. h. beliebig klein werden können.

Anm. Dagegen läßt sich nicht behaupten, daß eine Summe unendlich groß wird, wenn dies von jedem oder von mehreren Gliedern gilt. So wird z. B. in der Summe

$$2x - 5x + 3x$$

für $x = \infty$ jedes Glied unendlich groß, die Summe selbst aber ist allemal $= 0$, was auch immer x bezeichnen mag.

§. 5. Erklärung.

Eine Function einer Veränderlichen heißt stetig, wenn bei unendlich kleinem Zu- oder Abnehmen der Veränderlichen auch die Function ihren Werth um ein unendlich Kleines ändert. — Eine Function kann für jeden Werth der Veränderlichen stetig bleiben, oder sie ist vielleicht nur so lange stetig, als die Werthe der Veränderlichen zwischen gewissen Grenzen liegen.

Anm. So ist z. B. ax, wie leicht zu sehen, für jeden Werth von x eine stetige Function von x; dagegen hört der Bruch a : x auf eine stetige Function von x zu sein, wenn man x unendlich klein annimmt, da in diesem Falle der Bruch unendlich groß wird. Desgleichen kann $\sqrt{a^2 - x^2}$ nur so lange eine stetige Function von x sein, als x zwischen den Grenzen + a und — a gedacht wird, indem $\sqrt{a^2 - x^2}$, sobald x diese Grenzen überschreitet, imaginär wird.

Bemerkung. Wenn eine Zahl y als Function einer andern x gedacht wird, ohne daß die Form gegeben ist, welche diese Function haben soll, so bedient man sich der Bezeichnungsweise

$$y = f(x),$$

die also weiter nichts aussagt, als daß überhaupt y irgend eine Function von x vorstellen soll. Werden z, u, v ... ebenfalls als Functionen von x gedacht, die aber verschiedene Formen haben sollen, so kann man noch

$$z = F(x), \quad u = \varphi(x), \quad v = \psi(x)$$

u. dgl. m. setzen. — Sollte dagegen w eine Function einer andern Veränderlichen t vorstellen, aber in ihrer Form von der Function f(x) nicht verschieden sein, — z. B. wenn $y = \sqrt{2ax - x^2}$ und $w = \sqrt{2at - t^2}$ wäre, — so würde man

$$y = f(x) \text{ und } w = f(t)$$

setzen. Eben so ist klar, wie man den besondern Werth zu bezeichnen hat, den eine Function erhält, wenn man der Veränderlichen irgend einen bestimmten Werth beilegt; so wird in dem angeführten Beispiele

$$f(x) = \sqrt{2ax - x^2}$$

für $x = 0 \ldots f(0) = \sqrt{0 - 0} = 0$

" $x = a \ldots f(a) = \sqrt{2a^2 - a^2} = a$

" $x = 2a \ldots f(2a) = \sqrt{4a^2 - 4a^2} = 0$

u. dgl. m.

§. 6. Lehrsatz.

Wenn f(x) irgend eine Function von x bezeichnet, welche für $x = \alpha$ in $f(\alpha) = a$ und für $x = \beta$ in $f(\beta) = b$ übergeht und für alle zwischen α und β liegende Werthe von x stetig ist, wenn ferner c irgend eine zwischen a und b liegende Zahl bedeutet, so muß es auch zwischen α und β einen oder mehrere Werthe von x geben, für welche f(x) = c wird.

Bew. Man denke sich x allmählig von dem Werthe α in β übergehend, so nämlich, daß x alle Zahlen, welche zwischen α und β gedacht werden können, durchläuft; dann wird f(x) als stetige Function von x ebenfalls nur allmählig von a in b übergehen können und folglich alle zwischen a und b liegenden Werthe, also auch den Werth c durchlaufen. Es muß daher zwischen α und β (wenigstens) einen Werth von x geben, für welchen f(x) = c wird.

Anm. 1. Ist z. B.

$$y = f(x) = 4x^2 + 2x$$

gegeben, so hat man für $x = 1, \quad f(1) = 6$

und für $x = 2, \quad f(2) = 20;$

es muß daher nach dem obigen Beweise, da $4x^2 + 2x$ offenbar für alle Werthe von x sich stetig ändert, auch einen zwischen 1 und 2 liegenden Werth von x geben, für welchen z. B.

$$f(x) = 12$$

wird; und in der That ist, wenn man $x = 1\frac{1}{2}$ setzt, $4x^2 + 2x = 12$.

Anm. 2. Der Leser wird wohlthun zu bemerken, daß, wenn x von α bis β ununterbrochen wächst, die Function $f(x)$ darum nicht nothwendig von $f(\alpha) = a$ bis $f(\beta) = b$ fortwährend zu- oder abnimmt; es mag vielmehr leicht geschehen, daß die Function $f(x)$ bei diesem Uebergange von a zu b abwechselnd wächst und abnimmt und so vielleicht einen zwischen a und b liegenden Werth c mehrmals erhält, zu vergleichen mit einer krummen Linie, welche bei irgend einem Punkte A in der Höhe a anhebend und bei einem Punkte B in einer größern Höhe b endend durch wiederholte Krümmungen abwechselnd steigt und fällt und so an verschiedenen Stellen eine zwischen A und B in der Höhe c gezogene wagrechte Linie mehrmals durchschneidet oder berührt.

B. Von den ganzen Functionen und den höheren Gleichungen.

§. 7. Erklärung.

Die Functionen überhaupt können zunächst in entwickelte und unentwickelte eingetheilt werden; entwickelt heißt eine Function, wenn ein aus der Veränderlichen und aus Beständigen mit Hülfe arithmetischer Operationen zusammengesetzter Ausdruck gegeben ist, welcher der Function für jeden Werth der Veränderlichen gleichgedacht werden soll; unentwickelt heißt die Function, wenn dieses nicht stattfindet, sondern nur eine Gleichung gegeben ist, welche die zwischen der Funktion und der Veränderlichen stattfindende Beziehung ausdrückt. — Als Beispiele von entwickelten Functionen können alle bisher angeführten Functionen gelten; für unentwickelte Functionen kann jede unbestimmte Gleichung zwischen zwei Unbekannten*) als Beispiel dienen, von denen sich die eine als Function der andern ansehen läßt.

Die entwickelten Functionen werden eben so, wie die Bestimmungsgleichungen in algebraische und transcendente eingetheilt. Algebraisch heißt die Function, wenn die Veränderliche mit den Beständigen nur durch die sechs ersten Operationen (Addiren — Radiciren) verbunden ist und sich in keinem Exponenten findet; im entgegengesetzten Falle heißt die Function transcendent. Die algebraischen Functionen zerfallen weiter in irrationale und rationale, je nachdem die Veränderliche sich unter einem Wurzelzeichen findet oder nicht. Wenn man die rationale Function dem Verfahren unterwirft, nach welchem man rationale algebraische Gleichungen zu ordnen pflegt, so wird dieselbe eine der beiden Formen annehmen:

$$Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} \ldots\ldots\ldots + Px + Q$$

oder

$$\frac{Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} \ldots\ldots\ldots + Px + Q}{ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} \ldots\ldots\ldots + px + q},$$

wo die Buchstaben A, B, C . . . P, Q und a, b, c . . . p, q Beständige vorstellen sollen. Im erstern Fall heißt die Function ganz, im andern gebrochen. Eine ganze Function heißt vom nten Grade, wen n der größte Exponent der Potenzen von x ist; eine ganze Function vom ersten Grade nennt man auch eine einfache Function.

*) Arithmetik und Algebra §. 302 u. f.

§. 8. Zusatz.

Ist f(x) eine Function vom mten, $\varphi(x)$ eine Function vom nten Grade, so ist

1) die Summe oder Differenz $f(x) \pm \varphi(x)$ einer Function vom mten Grade gleich, wenn $m > n$ ist;

2) ferner ist das Product $f(x) . \varphi(x)$ einer Function vom $m + n$ten Grade

3) und die ganze Potenz $[f(x)]^p$ einer ganzen Function vom mpten Grade gleich.

Bew. Die Richtigkeit von (1) und (2) fällt in die Augen und (3) ist eine unmittelbare Folgerung aus (2).

Anm. 1. Ist z. B. eine Function vom dritten Grade

$$f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x - 8$$

und eine Function vom zweiten Grade

$$\varphi(x) = 4x^2 + x - 3$$

gegeben, so ist die Summe

$$f(x) + \varphi(x) = 3x^3 + 2x^2 + 6x - 11$$

einer Function vom dritten Grade gleich; dasselbe gilt von der Differenz

$$f(x) - \varphi(x) = 3x^3 - 6x^2 + 4x - 5.$$

Weiter ist das Product

$$f(x) . \varphi(x) = 12x^5 - 5x^4 + 9x^3 - 21x^2 - 23x + 24$$

eine Function vom $2 + 3 = 5$ten Grade und die ganze Potenz

$$[f(x)]^2 = 9x^6 - 12x^5 + 34x^4 - 68x^3 + 57x^2 - 80x + 64$$

eine Function vom $2 . 3 = 6$ten Grade.

So wie aber der Quotient zweier ganzen Zahlen nicht immer wieder einer ganzen Zahl gleich ist, eben so läßt sich auch nicht allemal für den Quotienten zweier ganzen Functionen wieder eine ganze Function setzen; ob dieses möglich sei oder nicht, davon wird man sich in jedem besondern Falle leicht durch gewöhnliches algebraisches Dividiren überzeugen können.

Anm. 2. Es dürfte vielleicht für manchen Leser nicht überflüssig sein, wenn hier noch besonders auf den Sinn der Behauptungen des obigen Satzes aufmerksam gemacht wird. Wenn z. B. in der zweiten Behauptung gesagt ist, daß das Product zweier Functionen, deren eine vom zweiten, die andere vom dritten Grade ist, einer Function vom fünften Grade gleich ist, so soll damit hier noch keineswegs behauptet sein, daß dieses Product nicht vielleicht auch außerdem einer Function vom vierten Grade gleich sein könne. Die Unzulässigkeit dieser Annahme folgt erst mit voller Bündigkeit und Klarheit aus §. 19, in welchem gezeigt wird, daß eine Function vom fünften Grade niemals für jeden Werth von x einer Function vom vierten Grade gleich sein kann.

§. 9. Lehrsatz.

Das Product aus n einfachen Factoren

$$P = (x + a)(x + b)(x + c) \ldots\ldots (x + q)$$

ist einer ganzen Function vom nten Grade gleich, in welcher der Coefficient von x^n der Einheit gleich ist und die Coefficienten von x^{n-1}, x^{n-2}, x^{n-3}... gefunden werden, wenn man aus den Elementen a, b, c...q die erste, zweite, dritte... Classe der Combinationen ohne Wiederholung bildet, die entstandenen Complexionen als Producte ansieht und diese Producte addirt.

— Bezeichnet man also in dem hier angegebenen Sinne die auf einander folgenden Combinationsclassen mit $\overset{1}{C}, \overset{2}{C}, \overset{3}{C} \ldots$, so ist

$$P = x^n + \overset{1}{C}x^{n-1} + \overset{2}{C}x^{n-2} + \overset{3}{C}x^{n-3} \ldots + \overset{n-1}{C}x + \overset{n}{C}.$$

Bew. Man findet den Satz zunächst für ein Product aus 2, 3, 4 Factoren bestätigt, wie die folgende Rechnung zeigt.

$$\begin{array}{l}
x + a \\
x + b \\
\hline
x^2 + ax \\
\quad + bx + ab \\
\hline
x^2 + (a + b)x + ab \\
\qquad\qquad x + c \\
\hline
x^3 + (a + b)x^2 + abx \\
\qquad + cx^2 + (ac + bc)x + abc \\
\hline
x^3 + (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x + abc \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x + d \\
\hline
x^4 + (a + b + c)x^3 + (ab + ac + bc)x^2 + abcx \\
\qquad + dx^3 + (ad + bd + cd)x^2 + (abd + acd + bcd)x + abcd \\
\hline
x^4 + (a + b + c + d)x^3 + (ab + ac + ad + bc + bd + cd)x^2 \\
\quad + (abc + abd + acd + bcd)x + abcd.
\end{array}$$

Um aber einzusehen, daß der für ein Product aus vier Factoren dargethane Satz auch für jede größere Anzahl der Factoren gilt, hat man nur zu erwägen, wie jedes folgende Product aus dem vorhergehenden abgeleitet wird. So ist z. B. in dem letzten Producte $(a+x)(b+x)(c+x)(d+x)$ der Coefficient des dritten Gliedes (x^2) erhalten worden, indem man zu dem Coefficienten des dritten Gliedes (x) in dem vorherg. Producte $(a + x)(b + x)(c + x)$ den mit d multiplicirten Coefficienten des zweiten Gliedes (x^2) dieses Productes addirt hat. Ganz eben so kann die zweite Classe der Combinationen ohne Wiederholung aus den Elementen a, b, c, d gebildet werden, wenn man zunächst, um die Formen ohne d zu erhalten, die zweite Classe der Combinationen aus a, b, c bildet, und um die Formen mit d zu finden, die erste Classe der Combinationen aus den Elementen a, b, c sucht und jeder d beifügt. Da dasselbe auf gleiche Weise von jedem andern Coefficienten und von jedem folgenden Producte gilt, so wird man die Coefficienten auch unmittelbar auf dem oben angegebenen Wege des Combinirens darstellen können*).

*) Sollte vielleicht ein Leser den obigen Beweis deshalb, weil in demselben — um größerer Anschaulichkeit willen — zunächst ein besonderer Coefficient herausgehoben ist, für nicht vollkommen streng und allgemein halten, so würde er durchaus irren. Denn es liegt doch einmal unmittelbar auf der Hand, wie das von dem dritten Coefficienten des vierten Productes Dargethane ganz eben so von jedem andern Coefficienten dieses Productes gilt, und mit nicht minderer Klarheit springt in die Augen, wie die für das Product aus vier Factoren angewandte Schußfolge für ein Product aus fünf Factoren ganz dieselbe bleibt; man hat eben weiter nichts nöthig, als e statt d zu setzen. Ueberhaupt kann ein Beweis als alle Fälle umfassend angesehen werden, wenn derselbe für 1, 2, 3 . . . Fälle so geführt ist, daß der Leser hierdurch in den Stand gesetzt wird, den vierten, fünften, sechsten . . . Fall in ganz ähnlicher Art selbst zu erledigen. — Das hier Gesagte gilt auch von mehreren folgenden Beweisen.

Anm. 1. So ist z. B. das Product

$$(x + 2)(x - 3)(x + 5)(x + 8) =$$

$$x^4 + \left.\begin{matrix} 2 \\ -3 \\ +5 \\ +8 \end{matrix}\right\} x^3 + \left.\begin{matrix} 2 \,.\, -3 \\ +2 \,.\, +5 \\ +2 \,.\, +8 \\ -3 \,.\, +5 \\ -3 \,.\, +8 \\ +5 \,.\, +8 \end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix} 2 \,.\, -3 \,.\, +5 \\ +2 \,.\, -3 \,.\, +8 \\ +2 \,.\, +5 \,.\, +8 \\ -3 \,.\, +5 \,.\, +8 \end{matrix}\right\} x + 2 \,.\, -3 \,.\, +5 \,.\, +8$$

$$= x^4 + 12x^3 + 21x^2 - 118x - 240,$$

wie auch eben so leicht durch gewöhnliches Multipliciren gefunden werden kann.

Anm. 2. Von dem vorherg. allgemeinen Satze ist der binomische (Arithmetik und Algebra §. 268) offenbar nur ein besonderer Fall, der entsteht, wenn man $a = b = c$ u. s. w. setzt.

§. 10. Zusatz.

Um überhaupt ein Product aus einfachen Factoren, wie

$$(\alpha x + a)(\beta x + b)(\gamma x + c)\ldots,$$

welche nicht gerade, wie im vorherg. §., durchgehends 1, sondern irgend beliebige Zahlen α, β, γ ... zu Coefficienten von x haben, nach dem dort angegebenen Verfahren zu entwickeln, braucht man nur diesem Producte die folgende Form zu geben

$$(\alpha\beta\gamma\ldots)\left(x + \frac{a}{\alpha}\right)\left(x + \frac{b}{\beta}\right)\left(x + \frac{c}{\gamma}\right)\ldots$$

§. 11. Aufgabe.

In dem Producte, welches entsteht, wenn eine ganze Function vom nten Grade

$$f(x) = A + Bx + Cx^2 \ldots\ldots + Px^n$$

mit einer andern ganzen Function vom mten Grade

$$\varphi(x) = a + bx + cx^2 \ldots\ldots + px^m$$

multiplicirt wird, irgend ein bestimmtes Glied, z. B. dasjenige, welches zum Factor x^k hat, darzustellen.

Aufl. Das Product $f(x) \,.\, \varphi(x)$ wird erhalten, wenn man jedes Glied der einen Function mit jedem der andern multiplicirt und die Glieder, welche gleich hohe Potenzen von x enthalten, in ein Glied vereinigt. Will man aber nicht das vollständige Product, sondern nur ein bestimmtes Glied mit dem Factor x^k haben, so wird man nur diejenigen Glieder der einen Function $f(x)$ mit denjenigen Gliedern der andern Function $\varphi(x)$ verbinden, in denen die Summe der Exponenten von x gleich k ist. Dem zufolge bilde man die zweite Classe der Variationen aus den Elementen 0, 1, 2, 3 ... zur Summe k und ersetze in den entstandenen Complexionen jede Ziffer in der ersten Stelle durch dasjenige Glied der einen Function $f(x)$, dessen Exponent von x dieser Ziffer gleich ist, und eben so setze man für die Ziffern in der zweiten Stelle die entsprechenden Glieder aus der andern Function $\varphi(x)$, wobei es sich von selbst versteht, daß diejenigen Complexionen, in denen die Ziffer in der ersten Stelle $> n$ oder die Ziffer in der zweiten Stelle $> m$ ist, übergangen werden. Die so entstandenen Verbindungen betrachte man als Producte, und ihre Summe ist das gesuchte Glied. — Es sei z. B.

$$f(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5$$
$$\varphi(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4,$$

und es werde das Glied des Productes $f(x) . \varphi(x)$ gesucht, welches zum Factor x^6 hat. Dann sind die Variationen zur Summe 6 aus den Elementen 0, 1, 2, 3 ... nebst den zugehörigen Producten folgende:

06
15
24 ...... $Cx^2 . ex^4$
33 ...... $Dx^3 . dx^3$
42 ...... $Ex^4 . cx^2$
51 ...... $Fx^5 . bx$
60

wobei aus den angegebenen Gründen die beiden ersten Complexionen und die letzte übergangen werden mußten. Hiernach ist das gesuchte Glied:

$$(eC + dD + cE + bF) . x^6.$$

§. 12. Zusatz.

Ganz eben so wird man, wenn drei, vier ... ganze Functionen von x mit einander multiplicirt werden sollen, um ein bestimmtes Glied, z. B. dasjenige zu erhalten, welches zum Factor x^k hat, die dritte, vierte ... Classe der Variationen ans den Elementen 0, 1, 2, 3 ... zur Summe k bilden und die Ziffern in den einzelnen Complexionen durch die entsprechenden Glieder der gegebenen Functionen ersetzen.

§. 13. Zusatz.

Soll eine ganze Function mit einer ganzen Zahl m potenzirt werden, so kann man sich die Function mmal als Factor gesetzt denken und wie vorhin verfahren. Weil aber hier diejenigen Variationsformen, welche sich nur durch die Stellung ihrer Elemente unterscheiden, die nämlichen Producte geben, so hat man nur nöthig, die mte Classe der Combinationen zu bilden und jede Form mit ihrer Permutationszahl zu multipliciren. Wird z. B. von der Potenz

$$(a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5)^4$$

das Glied gesucht, welches zum Factor x^7 hat, so sind die Combinationsformen der vierten Classe aus den Elementen 0, 1, 2, 3 ... zur Summe 7 und die zugehörigen Producte folgende:

0007
0016
0025 .... $4 . 3 . a . a . cx^2 . fx^5$
0034 .... $4 . 3 . a . a . dx^3 . ex^4$
0115 .... $4 . 3 . a . bx . bx . fx^5$
0124 .... $4 . 3 . 2 . 1 . a . bx . cx^2 . ex^4$
0133 .... $4 . 3 . a . bx . dx^3 . dx^3$
0223 .... $4 . 3 . a . cx^2 . cx^2 . dx^3$
1114 .... $4 . bx . bx . bx . ex^4$
1123 .... $4 . 3 . bx . bx . cx^2 . dx^3$
1222 .... $4 . bx . cx^2 . cx^2 . cx^2$

also das gesuchte Glied:

$$\left\{ \begin{array}{l} 12a^2cf + 12a^2de + 12ab^2f + 24abce \\ + 12abd^2 + 12ac^2d + 4b^3e + 12b^2cd + 4bc^3 \end{array} \right\} . x^7.$$

Anm. Man hat im Vorhergehenden (§. 9 und 10) gesehen, daß ein Product aus n einfachen Factoren allemal einer Function vom nten Grade gleich ist; es läßt sich aber auch umgekehrt zeigen, daß jede Function vom nten Grade in ein Product aus n einfachen Factoren zerlegbar ist, die aber allerdings eben sowohl imaginär als reell, (d. h. einer positiven oder negativen Zahl oder der Null gleich) sein können. Der Beweis dieses Satzes ist indeß mit erheblichen Schwierigkeiten verbunden, weshalb wir in dieser für die erste Einführung in die Analysis bestimmten Schrift auf die Ausführung desselben verzichten. So wichtig nun auch der angeführte Satz ist, so mag doch das Ausfallen desselben in diesem Buche insofern leichter verschmerzt werden, als die Beantwortung der noch wichtigeren Frage, die jenen Satz zugleich mit in sich schließen würde, wie sich allgemein eine Function vom nten Grade in ein Product aus n einfachen Factoren zerlegen lasse, dem Scharfsinne der ausgezeichnetesten Mathematiker bis jetzt noch nicht gelungen ist. Diese Frage ist übrigens einerlei mit der folgenden: Die Werthe von x aufzusuchen, für welche die Function f(x) verschwindet, oder mit andern Worten: die Resultate einer Gleichung vom nten Grade allgemein darzustellen. Denn so wie die Function f(x) offenbar durch die Annahme $x = -a$ den Werth Null erhalten muß, wenn dieselbe durch $x + a$ theilbar ist, indem sich dann

$$f(x) = (x + a) \cdot \varphi(x)$$

setzen läßt, so läßt sich auch umgekehrt zeigen, daß die Function f(x) durch $x + a$ theilbar ist, wenn sie für den besondern Werth $x = -a$ verschwindet, wie dies die beiden folgenden Sätze darthun.

§. 14. Lehrsatz.

Der Quotient $\frac{x^n - a^n}{x - a}$ ist einer ganzen Function vom $n-1$ten Grade gleich; es ist nämlich

$$\frac{x^n - a^n}{x - a} = x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} \ldots + a^{n-2}x + a^{n-1}$$

Bew. Die Richtigkeit dieser Gleichung fällt in die Augen, wenn man die rechte Seite derselben mit dem Divisor $x - a$ multiplicirt, wodurch man den Dividendus $x^n - a^n$ erhält. Desgleichen erhellt jene Gleichung nicht minder leicht (aus §. 248 der Arithmetik und Algebra), wenn man erwägt, daß die rechte Seite eine geometrische Reihe mit dem Anfangsgliede x^{n-1} und dem Exponenten $\frac{a}{x}$ ist.

Anm. So ist z. B. insbesondere

$$\frac{x^2 - a^2}{x - a} = x + a$$

$$\frac{x^3 - a^3}{x - a} = x^2 + ax + a^2$$

$$\frac{x^4 - a^4}{x - a} = x^3 + ax^2 + a^2x + a^3$$

u. s. f.

§. 15. Lehrsatz.

Wenn die ganze Function vom nten Grade

$$f(x) = x^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} \ldots + Px + Q$$

verschwindet, wenn man $x = \alpha$ setzt, so ist der Quotient

$$\frac{f(x)}{x - \alpha}$$

einer ganzen Function vom $n - 1$ten Grade gleich.

Bew. Es sei zunächst eine Function vom dritten Grade gegeben

$$1)\quad f(x) = x^3 + Bx^2 + Cx + D.$$

Soll diese verschwinden, wenn man dem x den besondern Werth α gibt, so muß

$$2)\quad 0 = \alpha^3 + B\alpha^2 + C\alpha + D$$

sein. Subtrahirt man (2) von (1), so erhält man

$$3)\quad f(x) = x^3 - \alpha^3 + B(x^2 - \alpha^2) + C(x - \alpha),$$

und wenn man beiderseits mit $x - \alpha$ dividirt,

$$4)\quad \frac{f(x)}{x - \alpha} = \frac{x^3 - \alpha^3}{x - \alpha} + B\frac{(x^2 - \alpha^2)}{x - \alpha} + C$$

oder zufolge des vorherg. §.

$$5)\quad \frac{f(x)}{x - \alpha} = x^2 + \alpha x + \alpha^2 + B(x + \alpha) + C$$

$$= x^2 + (\alpha + B)x + (\alpha^2 + B\alpha + C),$$

welches offenbar eine Function vom zweiten Grade ist.

Weil aber der vorherg. Satz ganz allgemein gilt, so muß auch das eben Gesagte von jeder beliebigen Function gelten; und in der That setzt man allgemein

$$1)\quad f(x) = x^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} \ldots + Px + Q$$

und nach der Voraussetzung

$$2)\quad 0 = \alpha^n + B\alpha^{n-1} + C\alpha^{n-2} \ldots + P\alpha + Q,$$

so erhält man, wenn man (2) von (1) subtrahirt und dann durch $x - \alpha$ dividirt,

$$\frac{f(x)}{x - \alpha} = \frac{x^n - \alpha^n}{x - \alpha} + B \,.\, \frac{x^{n-1} - \alpha^{n-1}}{x - \alpha} + C \,.\, \frac{x^{n-2} - \alpha^{n-2}}{x - \alpha} \ldots + P \,.\, \frac{x - \alpha}{x - \alpha}.$$

In dieser Gleichung sind die Glieder der rechten Seite zufolge des vorherg. §. ganze Functionen von x und zwar nach der Reihe vom $n - 1$ten, $n - 2$ten, $n - 3$ten Grade u. s. w.; es muß daher auch ihre Summe nach §. 8, 1. eine Function vom $n - 1$ten Grade sein, w. z. b. w.

Anm. So verschwindet z. B. die Function

$$x^3 + 4x^2 - 5x - 14,$$

wenn man $x = 2$ setzt. Dividirt man nun dieselbe auf gewöhnliche algebraische Weise durch $x - 2$, so erhält man zum Quotienten $x^2 + 6x + 7$, ohne daß ein Rest bliebe, und man wird daher

$$x^3 + 4x^2 - 5x - 14 = (x - 2) \,.\, (x^2 + 6x + 7)$$

setzen können.

§. 16. Lehrsatz.

Wenn die ganze Function vom nten Grade

$$f(x) = x^n + Bx^{n-1} \ldots + Px + q$$

für n von einander verschiedene Werthe von $x = \alpha, \beta, \gamma \ldots \nu$ verschwindet, so ist

$$f(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \ldots (x - \nu).$$

Bew. Nach dem vorherg. §. kann man zunächst, da f(x) für $x = \alpha$ verschwinden soll, setzen:

$$f(x) = (x - \alpha)(x^{n-1} + B'x^{n-2} \ldots + P'x + Q').$$

Da nun f(x) auch für $x = \beta$ verschwindet und in dem Producte, welches die rechte Seite der vorstehenden Gleichung bildet, der erste Factor $x - \alpha$ für $x = \beta$ nicht Null wird, weil β nach der Voraussetzung von α verschieden ist, so muß der zweite Factor

$$x^{n-1} + B''x^{n-2} \ldots + P'x + Q'$$

für $x = \beta$ verschwinden, und man wird daher nach dem vorherg. §. diesen Factor durch das Product

$$(x - \beta) \cdot (x^{n-2} + B''x^{n-3} \ldots P''x + Q'')$$

ersetzen können. Hiernach erhält man

$$f(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x^{n-2} + B''x^{n-3} \ldots + P''x + Q'').$$

Da ferner f(x) für $x = \gamma$ verschwinden soll und γ von α und β verschieden ist, so muß vermöge der oben angewendeten Schlußfolge der Factor

$$x^{n-2} + B'x^{n-3} \ldots + P''x + Q''$$

für $x = \gamma$ verschwinden, weshalb man wieder nach dem vorherg. §. diesen Factor ersetzen kann durch

$$(x - \gamma)(x^{n-3} + B'''x^{n-4} \ldots + P'''x + Q''').$$

Demnach ist

$$f(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)(x^{n-3} + B'''x^{n-4} \ldots + P'''x + Q''').$$

Auf diesem Wege fortfahrend findet man überhaupt

$$f(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \ldots (x - \nu).$$

Anm. So verschwindet z. B. die ganze Function von x

$$x^4 - 7x^3 + 5x^2 + 31x - 30,$$

welche vom vierten Grade ist, für folgende vier verschiedene Werthe von x

$$+1, \quad -2, \quad +3 \text{ und } +5,$$

und es muß folglich sein

$$x^4 - 7x^3 + 5x^2 + 31x - 30 = (x - 1)(x + 2)(x - 3)(x - 5),$$

eine Gleichung, von deren Richtigkeit man sich auch leicht durch Entwickelung der rechten Seite überzeugen kann.

§. 17. Zusatz.

Wenn die ganze Function von x

$$f(x) = Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} \ldots + Px + Q$$

für n von einander verschiedene Werthe von $x = \alpha, \beta, \gamma \ldots \nu$ verschwindet, so ist

$$f(x) = A(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \ldots (x - \nu).$$

Bew. Denn es ist

$$f(x) = A \cdot \left(x^n + \frac{B}{A}x^{n-1} + \frac{C}{A}x^{n-2} \ldots + \frac{P}{A}x + \frac{Q}{A}\right).$$

Da der erste Factor A des vorstehenden Products von Null verschieden gedacht wird, so muß der zweite Factor

$$x^n + \frac{B}{A}x^{n-1} + \frac{C}{A}x^{n-2} \ldots + \frac{P}{A}x + \frac{Q}{A}$$

für die angegebenen n Werthe von x verschwinden, und man kann daher nach dem vorherg. §. denselben durch das Product

$$(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \ldots (x - \nu)$$

ersetzen, woraus folgt

$$f(x) = A(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \ldots\ldots (x - \nu).$$

Anm. So verschwindet die Function

$$3x^2 + 10x - 8,$$

wenn man $x = \frac{2}{3}$ oder $= -4$ annimmt, und es ist daher, wie man auch anderweitig leicht findet,

$$3x^2 + 10x - 8 = 3(x - \tfrac{2}{3})(x + 4).$$

§. 18. Lehrsatz.

Eine ganze Function vom nten Grade kann niemals für mehr, als n verschiedene Werthe von x verschwinden.

Bew. Denn wenn die ganze Function vom nten Grade

$$f(x) = Ax^n + Bx^{n-1} \ldots + Px + Q$$

zunächst für die n verschiedenen Werthe von $x = \alpha, \beta, \gamma \ldots . \nu$ verschwindet, so hat man nach dem vorherg. §.

$$f(x) = A(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \ldots . (x - \nu).$$

Sollte nun f(x) noch für irgend einen andern Werth von $x = \pi$ verschwinden, so müßte auch das Product

$$A(\pi - \alpha)(\pi - \beta)(\pi - \gamma) \ldots . (\pi - \nu) = 0$$

werden, welches nicht möglich ist, da π von $\alpha, \beta, \gamma \ldots \nu$ und A von Null verschieden sein soll, und ein Product nicht anders verschwinden kann, als wenn einer seiner Factoren = 0 wird.

*§. 19. Lehrsatz.

Wenn zwei ganze Functionen vom nten Grade

$$f(x) = Ax^n + Bx^{n-1} \ldots\ldots + Px + Q,$$
$$f'(x) = A'x^n + B'x^{n-1} \ldots\ldots + P'x + Q'$$

für mehr, als n von einander verschiedene Werthe von x gleiche Werthe erhalten, so sind die Coefficienten der gleich hohen Potenzen von x in beiden dieselben, also $A = A'$, $B = B'$, ... $P = P'$, $Q = Q'$, und die beiden Functionen sind folglich identisch.

Bew. A kann von A' nicht verschieden sein, weil sonst

$$fx - f'x = (A - A')x^n + (B - B')x^{n-1} \ldots + (P - P')x + Q - Q'$$

eine Function vom nten Grade wäre, welche für mehr, als n von einander verschiedene Werthe von x verschwände, welches nach dem vorletzten Satze unmöglich ist. Es muß daher $A = A'$ sein. Eben so ergibt sich $B = B'$, $C = C'$ u. s. w.

§. 20. Zusatz.

Die vorhergehenden Sätze von ganzen Functionen verstatten folgende unmittelbare Anwendungen auf höhere Gleichungen:

1) Durch §. 15 wird man in den Stand gesetzt, die Auflösung einer Gleichung

$$\text{A)}\quad f(x) = 0,$$

wenn eine Wurzel derselben $x = \alpha$ vielleicht auf dem Wege des Versuches gefunden oder anderweitig gegeben ist, auf die Auflösung einer Gleichung vom nächstniedrigeren Grade zurückzuführen. Man wird nämlich f(x) durch $x - \alpha$ dividiren und den Quotienten = 0 setzen. Die Wurzeln der entstandenen Gleichung, die um einen Grad niedriger ist, als die gegebene, mit

der Wurzel $x = \alpha$ verbunden, liefern die sämmtlichen Wurzeln der gegebenen Gleichung (A).

So erkennt man z. B. sehr bald, daß der Gleichung

$$1)\ x^3 + 2x - 21x + 18 = 0$$

durch die Annahme $x = 1$ Genüge geschieht; dividirt man nun die linke Seite derselben durch $x - 1$ und setzt den entstandenen Quotienten $x^2 + 3x - 18$ gleich Null, so erhält man eine quadratische Gleichung

$$x^2 + 3x - 18 = 0.$$

Lös't man diese auf bekannte Weise auf, so findet man als Wurzeln derselben $x = 3$ und $x = -6$. Demnach sind die sämmtlichen Wurzeln der gegebenen Gleichung (1)

$$x = 1,\ x = 3 \text{ und } x = -6^{*}).$$

2) Wenn $x = \alpha$ eine Wurzel der Gleichung (A) ist und $f(x)$ nach der Division mit $x - \alpha$ einen Quotienten gibt, der ebenfalls für $x = \alpha$ verschwindet und folglich $x - \alpha$ zum Factor hat, so sagt man, die Gleichung (A) enthalte die Wurzel α zweimal; sollte auch jener Quotient durch $x - \alpha$ dividirt einen Quotienten geben, der $x - \alpha$ zum Factor hat, so würde die Gleichung (A) die Wurzel $x = \alpha$ dreimal enthalten, u. s. f. Im allgemeinen enthält die Gleichung (A) die Wurzel α pmal, wenn sich die linke Seite derselben

$$f(x) = (x - \alpha)^p \,.\, F(x)$$

setzen läßt, wo $F(x)$ eine ganze Function von x vom $n - p$ten Grade bezeichnen soll, welche durch die Annahme $x = \alpha$ nicht $= 0$ wird.

Wenn man z. B. in der Gleichung

$$2)\ x^5 - 6x^4 - 13x^3 + 142x^2 - 300x + 200 = 0$$

die linke Seite wiederholt durch $x - 2$ dividirt, so erhält man nach einander die Quotienten

$$x^4 - 4x^3 - 21x^2 + 100x - 100$$
$$x^3 - 2x^2 - 25x + 50$$
$$x^2 - 25.$$

Hiernach läßt sich der Gleichung (2) auch die Form

$$(x - 2)^3 \,.\, (x^2 - 25) = (x - 2)^3 \,.\, (x - 5) \,.\, (x + 5) = 0$$

geben, aus welcher man ersieht, daß die Gleichung (2) die Wurzel $x - 2$ dreimal enthält.

3) Aus §. 18 folgt ferner: **eine Gleichung vom nten Grade kann nie mehr (aber wohl weniger), als n von einander verschiedene reelle Wurzeln haben.**

So hat z. B. die obige Gleichung (1), welche vom dritten Grade ist, drei reelle Wurzeln; dagegen hat die Gleichung

$$x^3 - 1 = 0$$

*) Wendet man dieses Verfahren auf die Gleichung

$$x^3 = 1 \text{ oder } x^3 - 1 = 0$$

an, welcher die reelle Wurzel $x = 1$

zukommt, so erhält man nach der Division mit $x - 1$ die quadratische Gleichung

$$x^2 + x + 1 = 0$$

und aus dieser die beiden imaginären Wurzeln

$$x = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \text{ und } x = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}.$$

nur die einzige reelle Wurzel $x = 1$. Ja es ist bekannt genug, daß häufig quadratische Gleichungen gar keine reelle, sondern zwei imaginäre Wurzeln haben. Ferner hat die Gleichung (2) zwar allerdings fünf Wurzeln; aber da darunter drei gleiche Wurzeln sind, so ist die Zahl ihrer verschiedenen Wurzeln nur drei, nämlich $x = 2$, $x = 5$ und $x = -5$.

4) Weiter folgt aus §. 9: wenn die Gleichung vom nten Grade

$$x^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} \dots + Px + Q = 0$$

n reelle Wurzeln $\alpha, \beta, \gamma \dots \nu$ hat, so ist der Coefficient des zweiten Gliedes

$$B = -(\alpha + \beta + \gamma \dots + \nu)$$

und das letzte Glied, (welches kein x enthält):

$$Q = \pm\, \alpha . \beta . \gamma \dots \nu,$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist*).

So hat z. B. die Gleichung

$$x^4 - 2x^3 - 21x^2 + 22x + 40 = 0$$

die Wurzeln

$$+2,\ +5,\ -1 \text{ und } -4$$

und in der That ist

$$+2 + 5 - 1 - 4 = +2 = -(-2)$$

und $$(+2) . (+5) . (-1) . (-4) = +40.$$

Ferner hat die Gleichung

$$x^5 + x^4 - 13x^3 - 13x^2 + 36x + 36 = 0$$

die Wurzeln

$$+2,\ +3,\ -1,\ -2,\ -3,$$

und auch hier ist

$$+2 + 3 - 1 - 2 - 3 = -1.$$

und $$(+2) . (+3) . (-1) . (-2) . (-3) = -36.$$

§. 21. Zusatz.

Für das Aufsuchen der rationalen Wurzeln einer Gleichung sind auch folgende Sätze von Nutzen:

1) Wenn in der Gleichung

$$\text{A)}\quad x^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} \dots + Px + Q = 0$$

alle Coefficienten B, C ... P, Q ganze Zahlen sind, so gibt es keine rationale gebrochene Zahl, welche statt x gesetzt der Gleichung Genüge leisten könnte. — Denn gesetzt es sei x einem in den kleinsten Zahlen ausgedrückten Bruche $\frac{v}{u}$ gleich, so würde durch Einsetzen dieses Werthes die obige Gleichung übergehen

$$\frac{u^n}{v^n} + \frac{Bu^{n-1}}{v^{n-1}} + \frac{Cu^{n-2}}{v^{n-2}} \dots + \frac{Pu}{v} + Q = 0$$

oder $$u^n + Bu^{n-1}v + Cu^{n-2}v^2 \dots + Puv^{n-1} + Qv^n = 0$$

oder $$u^n = -v(Bu^{n-1} + Cu^{n-2}v \dots + Puv^{n-2} + Qv^{n-1}).$$

*) Von diesem allgemeinen Satze ist offenbar §. 192 der Arithmetik und Algebra ein besonderer Fall.

Diese letzte Gleichung kann aber unmöglich richtig sein, da ihre rechte Seite durch v theilbar wäre, während v in der linken Seite u^n, da u und v als relative Primzahlen vorausgesetzt sind, (nach §. 283 der Arithm.) nicht aufgehen kann.

2) Wenn in der Gleichung (A) alle Coefficienten ganze Zahlen sind und α eine Wurzel dieser Gleichung ist, so ist α ein Theiler des letzten Gliedes Q*). — Denn da α ein Wurzel der Gleichung (A) sein soll, so wird man

$$\alpha^n + B\alpha^{n-1} + C\alpha^{n-2} \ldots + P\alpha + Q = 0,$$

oder

$$\frac{Q}{\alpha} = -(\alpha^{n-1} + B\alpha^{n-2} + C\alpha^{n-3} \ldots + P)$$

setzen können. In der rechten Seite dieser Gleichung sind alle Glieder nach der Voraussetzung ganze Zahlen; es muß daher auch die linke Seite eine ganze Zahl, d. h. α ein Theiler von Q sein.

3) Will man daher auf dem Wege des Versuchs die rationalen Wurzeln einer Gleichung erforschen, deren Coefficienten ganze Zahlen sind, so wird man sich auf das Einsetzen solcher Zahlen beschränken können, welche in dem letzten Gliede aufgehen.

Wenn z. B. die Gleichung

$$x^4 - 9x^3 + 15x^2 + 39x - 70 = 0$$

gegeben ist, so sind die Theiler des letzten Gliedes

1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70.

Setzt man diese Zahlen, sowohl positiv als negativ genommen, in die gegebene Gleichung, so findet man, daß nur durch die Annahmen

$$x = -2 \text{ und } x = +5$$

der Gleichung Genüge geschieht; es kann dieselbe daher keine andern rationalen Wurzeln haben. Und in der That, wenn man die linke Seite der gegebenen Gleichung durch das Product

$$(x + 2) . (x - 5) = x^2 - 3x - 10$$

dividirt und den Quotienten = 0 setzt, so erhält man eine quadratische Gleichung

$$x^2 - 6x + 7 = 0,$$

welcher die beiden irrationalen Wurzeln

$$x = 3 + \sqrt{2} = 4{,}4142\ldots$$

und

$$x = 3 - \sqrt{2} = 1{,}5858\ldots$$

zukommen.

4) Wenn aber in der Gleichung (A) einer oder mehrere Coefficienten gebrochene Zahlen sind, so kann man die Wurzeln dieser Gleichung von den Wurzeln einer andern Gleichung abhängig machen, in welcher alle Coefficienten ganze Zahlen sind, und auch der erste wieder = 1 ist. Man braucht nämlich nur, wenn W der Generalnenner für alle vorkommenden Brüche ist, $x = \frac{y}{W}$ zu setzen, wodurch sich die Gleichung (A) verwandelt in die folgende:

*) Dieser Satz ist keineswegs bereits in (4) des vorherg. §. allgemein erwiesen, indem das dort Gesagte nur in dem besondern Falle, daß alle Resultate der Gleichung reell und rational sind, für den Beweis der obigen Behauptung genügen würde.

$$\frac{y^n}{W^n} + \frac{By^{n-1}}{W^{n-1}} + \frac{Cy^{n-2}}{W^{n-2}} \ldots + \frac{Py}{W} + Q = 0$$

oder B) $y^n + WBy^{n-1} + W^2Cy^{n-2} \ldots + W^{n-1}Py + W^nQ = 0$,

in welcher offenbar alle Coefficienten ganze Zahlen sind. Hat man aber die Wurzeln dieser letzten Gleichung gefunden, so kennt man auch die Wurzeln der Gleichung (A), indem $x = \frac{y}{W}$ ist.

So wird man, wenn z. B. die Gleichung

$$x^3 + \frac{5}{6}x^2 - \frac{17}{3}x + \frac{5}{2} = 0$$

gegeben ist, $x = \frac{y}{6}$ zu setzen haben, wodurch die gegebene Gleichung übergeht in

$$\frac{y^3}{216} + \frac{5y^2}{216} - \frac{17y}{18} + \frac{5}{2} = 0$$

oder $$y^3 + 5y^2 - 204y + 540 = 0,$$

und da dieser Gleichung die Wurzeln

$$y = 3, \quad y = 10 \text{ und } y = -18$$

angehören, so sind die Wurzeln der ursprünglichen Gleichung

$$x = \frac{1}{2}, \quad x = \frac{5}{3} \text{ und } x = -3.$$

Anm. 1. Bezeichnet überhaupt W eine Zahl von der Beschaffenheit, daß die Gleichung (B), in welche die Gleichung (A) durch die Annahme $x = \frac{y}{W}$ übergeht, nur ganze Zahlen zu Coefficienten hat, so wird man häufig statt W auch kleinere Zahlen als den Generalnenner aller gebrochenen Coefficienten setzen und die Rechnung hierdurch abkürzen können. Es braucht nämlich, wie aus dem Anblick der Gleichung (B) deutlich zu ersehen ist, die gesuchte Zahl nur die Eigenschaft zu haben, daß der Nenner des zweiten Coefficienten (B) in der Zahl selbst, der Nenner des dritten Coefficienten (C) in ihrer zweiten Potenz, der Nenner des vierten Coefficienten (D) in ihrer dritten Potenz u. s. w. aufgeht. Eine solche Zahl findet man aber äußerst leicht, wenn man die gegebenen Nenner in ihre einfachen Factoren zerlegt und aus diesen die gesuchte Zahl zusammensetzt, indem man jeden Factor so viel mal hinschreibt, als für den angegebenen Zweck erforderlich ist.

Ist z. B. die Gleichung

$$x^4 - \frac{7}{6}x^3 + 5x^2 + \frac{7}{96}x - \frac{31}{216} = 0$$

gegeben, so sind die in ihre einfachen Factoren zerlegten Nenner nach der Reihe

$$2 . 3, \quad 1, \quad 2^5 . 3, \quad 2^3 . 3^3,$$

und die kleinste Zahl, in deren

1ter, 2ter, 3ter, 4ter

Potenz beziehlich diese Nenner aufgehen, ist, wie man auf der Stelle sieht,

$$2^2 . 3 = 12.$$

Setzt man hiernach $x = \frac{y}{12}$, so verwandelt sich die gegebene Gleichung in

$$y^4 - 14y^3 + 720y^2 + 126y - 2976 = 0.$$

Anm. 2. Zur Uebung der in §. 21 vorgetragenen Lehren führen wir folgende Beispiele an:

1) $x^3 - 4x^2 - 20x + 48 = 0$;
$x = +2,\ x = -4,\ x = +6.$

2) $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$;
$x = -1,\ x = +2,\ x = -3.$

3) $x^3 - 7x^2 - 6x - 42 = 0$;
$x = +7,\ x = \sqrt{6} = 2{,}4494..,\ x = -\sqrt{6} = -2{,}4494..$

4) $x^3 - 5x^2 + 11x - 15 = 0$;
$x = +3,\ x = 1 + 2\sqrt{-1},\ x = 1 - 2\sqrt{-1}.$

5) $x^4 + x^3 - 27x^2 - 25x + 150 = 0$;
$x = +1,\ x = -2,\ x = +5,\ x = +6.$

6) $x^4 + 4x^3 - 32x^2 - 80x + 75 = 0$;
$x = -3,\ x = +5,\ x = -3 + \sqrt{14} = +0{,}7416..,$
$x = -3 - \sqrt{14} = -6{,}7416..$

7) $x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 6 = 0$;
$x = +2,\ x = +3,\ x = +\sqrt{-1},\ x = -\sqrt{-1}.$

8) $x^3 - 5\tfrac{1}{6}x^2 + 5x - 1\tfrac{1}{3} = 0$;
$x = +4,\ x = +\tfrac{1}{2},\ x = +\tfrac{1}{3}.$

9) $x^3 + 1\tfrac{1}{6}x - 1\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{3} = 0$;
$x = +\tfrac{1}{2},\ x = +\tfrac{1}{3},\ x = -2.$

10) $x^3 + 2\tfrac{3}{4}x^2 - 4\tfrac{5}{8}x + 1\tfrac{1}{2} = 0$;
$x = +\tfrac{1}{2},\ x = +\tfrac{3}{4},\ x = -4.$

Bemerk. Die vorhergehenden Sätze zeigen, wie man die rationalen Wurzeln einer höheren Gleichung auffinden kann; die nächstfolgenden Sätze handeln davon, wie sich für die irrationalen Wurzeln Näherungswerthe aufsuchen lassen.

§. 22. Lehrsatz.

Eine ganze Function der Veränderlichen x ist allemal für jeden Werth von x eine stetige Function.

Bew. Die Richtigkeit des Satzes möge zuerst für eine Function vom dritten Grade

$$f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

dargethan werden. — Gibt man der Veränderlichen x irgend einen bestimmten Werth α und einen von diesem verschiedenen Werth $\alpha + \delta$, so erhält man die Gleichungen

1) $$f(\alpha) = A\alpha^3 + B\alpha^2 + C\alpha + D$$

und 2) $$f(\alpha + \delta) = A(\alpha + \delta)^3 + B(\alpha + \delta)^2 + C(\alpha + \delta) + D,$$

oder wenn man die Potenzen nach dem binomischen Satze entwickelt,

3) $$f(\alpha + \delta) = \left\{ \begin{array}{l} A\alpha^3 + 3A\alpha^2\delta + 3A\alpha\delta^2 + A\delta^3 \\ + B\alpha^2 + 2B\alpha\delta + B\delta^2 \\ + C\alpha + C\delta \\ + D. \end{array} \right.$$

Wenn man (1) von (3) subtrahirt und die Glieder vereinigt, welche gleich hohe Potenzen von δ zum Factor haben, so ergibt sich

4) $$f(\alpha + \delta) - f(\alpha) = (3A\alpha^2 + 2B\alpha + C)\delta + (3A\alpha + B)\delta^2 + A\delta^3.$$

Denkt man sich nun δ in's Unendliche abnehmend, so nehmen offenbar auch sämmtliche Glieder auf der rechten Seite der Gleichung (4) in's Unendliche ab, und dasselbe muß daher auch nach §. 4 von der Summe derselben gelten, was auch immer α bezeichnen mag, so lange nur überhaupt α eine bestimmte unveränderliche Zahl vorstellt. Demnach wird die Aenderung, welche die Function f(x) erleidet, wenn man irgend einen Werth von x sich um ein unendlich Kleines ändern läßt, ebenfalls unendlich klein, und die ganze Function f(x) ist folglich für jeden beliebigen Werth der Veränderlichen x eine stetige Function.

Das so eben von einer Function vom dritten Grade Erwiesene gilt aber auch von einer jeden Function von irgend einem andern Grade; denn der obige Beweis stützt sich wesentlich nur auf den binomischen Lehrsatz und auf §. 4, und da diese Sätze allgemein richtig sind, so muß auch der vorstehende Satz ganz allgemein gelten.

§. 23. Lehrsatz.

In der ganzen Function

$$f(x) = Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} \ldots + Px + Q$$

läßt sich allemal x groß genug annehmen, daß, abgesehen vom Vorzeichen, das erste Glied allein größer wird, als die Summe aller übrigen Glieder.

Bew. Man ertheile der gegebenen Function folgende Form:

$$f(x) = x^n\left(A + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} \ldots + \frac{P}{x^{n-1}} + \frac{Q}{x^n}\right).$$

Läßt man nun x fortwährend und in's Unendliche wachsen, so wird in dem eingeschlossenen Ausdruck das erste Glied A ungeändert bleiben, die übrigen Glieder aber werden immer mehr abnehmen und zuletzt unendlich klein werden. Da dasselbe nach §. 4 auch von ihrer Summe gilt, so muß es folglich möglich sein, x groß genug anzunehmen, daß das erste Glied A allein größer, als die Summe der übrigen, also

$$A > \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} \ldots + \frac{P}{x^{n-1}} + \frac{Q}{x^n}$$

wird, und da diese Ungleichung richtig bleibt, wenn man beiderseits mit x^n multiplicirt, so ist folglich dann auch

$$Ax^n > Bx^{n-1} + Cx^{n-2} \ldots + Px + Q$$

w. z. e. w.

Anm. Man kann auch die Frage, wie groß x angenommen werden müsse, um die obige Bedingung zu erfüllen, ohne alle Schwierigkeit von vorn herein beantworten. Ist nämlich zunächst der erste Coefficient $A = 1$, wie dies bei höheren Gleichungen in der Regel der Fall ist, und ist ferner k absolut genommen der größte unter den übrigen Coefficienten, so braucht man nur $x \geqq k + 1$ zu setzen, um ganz sicher den angegebenen Zweck zu erreichen. — Denn wenn man die Summe der auf das erste folgenden Glieder der Kürze wegen mit S bezeichnet, so ist offenbar

$$1) \quad S \leqq k\,(x^{n-1} + x^{n-2} \ldots + x + 1),$$

d. h. wenn man die eingeschlossene geometrische Reihe mit dem Anfangsgliede 1, dem Exponenten x und der Anzahl der Glieder n (nach §. 248 der Arithmetik und Algebra oder nach §. 14 dieses Capitels) summirt,

$$2)\quad S \gtreqless k\left(\frac{x^n - 1}{x - 1}\right)$$

oder

$$S \gtreqless \frac{kx^n}{x-1} - \frac{k}{x-1},$$

also jedenfalls

$$3)\quad S < \frac{kx^n}{x-1}.$$

Soll nun $S < x^n$ werden, so hat man weiter nichts nöthig, als

$$x - 1 \geqq k, \text{ d. h. } x \geqq k + 1$$

zu setzen, indem dann offenbar $\frac{kx^n}{x-1} \leqq x^n$,

also vermöge (3) $S < x^n$ sein muß.

Wäre der erste Coefficient A nicht $= 1$, so würde man, wie man leicht einsieht, wenn man

$$f(x) = A\left(x^n + \frac{B}{A}x^{n-1} + \frac{C}{A}x^{n-2} \ldots + \frac{P}{A}x + Q\right)$$

setzt, für den angegebenen Zweck

$$x \geqq \frac{k}{A} + 1$$

anzunehmen haben.

§. 24. Zusatz.

Aus dem vorhergehenden Satze folgt, daß man in der Gleichung

$$f(x) = x^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} \ldots + Px + Q = 0$$

allemal dem x absolut genommen hinreichend große Werthe beilegen kann, daß der Werth der ganzen linken Seite f(x) mit dem ersten Gliede x^n einerlei Vorzeichen erhält. — Dergleichen Werthe positiv oder negativ genommen können dann als Grenzen dienen, zwischen denen die positiven und negativen Wurzeln einer Gleichung liegen müssen.

Anm. So wird z. B. in der Gleichung

$$(\odot)\quad x^3 + 4x^2 - 11x - 26 = 0$$

das erste Glied und die ganze linke Seite positiv, wenn man $x \gtreqqless 3$ annimmt, indem dann offenbar $x^3 > 26$ und $4x^2 > 11x$ ist. Es kann daher auch die Gleichung keine Wurzel haben, welche $\gtreqqless 3$ wäre, und 3 ist also eine Grenze für die positiven Wurzeln. Um eben so eine Grenze für die negativen Wurzeln zu erhalten, setze man $x = -y$; dadurch geht die Gleichung ($\odot$) nach Umkehrung der Vorzeichen über in

$$(☽)\quad y^3 - 4y^2 - 11y + 26 = 0.$$

Setzt man in dieser Gleichung $y = +6$, so wird die linke Seite derselben positiv, und dasselbe muß um so mehr gelten, wenn man $y > +6$ annimmt. Denn gibt man der Gleichung (☽) die Form

$$y^3\left(1 - \frac{4}{y} - \frac{11}{y^2}\right) + 26 = 0,$$

so sieht man leicht, daß der eingeschlossene Factor für $y = 6$ positiv wird, und daß derselbe wächst, je größer man y annimmt, indem die negativen Glieder abnehmen. — Nimmt man also in der Gleichung ($\odot$) x negativ und $\geqq 6$ an, so wird das erste Glied, so wie der Werth der ganzen linken Seite negativ, und es müssen folglich die negativen Wurzeln der Gleichung zwischen 0 und -6 liegen.

§. 25. Lehrsatz.

Wenn in der Gleichung

$$x^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} \ldots + Px + Q = 0$$

für einen bestimmten Werth von $x = \alpha$ die linke Seite

$$x^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} \ldots + Px + Q$$

einer positiven Zahl $+ \mathfrak{A}$ und für einen andern Werth von $x = \beta$ einer negativen Zahl $- \mathfrak{B}$ gleich wird, so muß zwischen α und β ein Werth von x liegen, für welchen dieselbe verschwindet, und der folglich als eine Wurzel der gegebenen Gleichung angesehen werden kann.

Der Beweis dieses Satzes ist in §. 6 enthalten.

§. 26. Lehrsatz.

Ist in der Gleichung

$$f(x) = x^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} \ldots + Px + Q = 0$$

n eine ungerade Zahl, so hat dieselbe allemal eine reelle und zwar positive oder negative Wurzel, je nachdem Q negativ oder positiv ist.

Bew. Es sei zunächst Q negativ $= - \mathfrak{Q}$, so wird man nach §. 24 x positiv und groß genug, etwa $= + k$ annehmen können, daß die linke Seite der Gleichung einer positiven Zahl $+ \mathfrak{A}$ gleich wird. Nun ist aber

für $x = 0 \ldots \quad f(x) = Q = - \mathfrak{Q}$

und zufolge der Annahme

für $x = + k \ldots \quad f(x) = + \mathfrak{A}$.

Demnach muß die Gleichung, wie im vorherg. §. gezeigt ist, eine zwischen 0 und $+ k$ liegende positive Wurzel haben.

Es sei ferner das letzte Glied Q positiv $= + \mathfrak{Q}'$; — da n ungerade ist, so wird das erste Glied negativ, wenn man x negativ annimmt, und zufolge §. 24 läßt sich dieser negative Werth von x groß genug, etwa $= - k'$ annehmen, daß die ganze linke Seite der Gleichung einer negativen Zahl $- \mathfrak{A}'$ gleich wird. Hiernach ist also

für $x = 0 \ldots \quad f(x) = + \mathfrak{Q}'$

und für $x = - k' \ldots \quad f(x) = - \mathfrak{A}'$,

und die gegebene Gleichung hat folglich vermöge des vorherg. §. eine zwischen 0 und $- k$ liegende negative Wurzel.

Anm. So muß z. B. die Gleichung

$$x^3 - 2x^2 + 6x - 12 = 0$$

jedenfalls eine positive Wurzel und die Gleichung

$$x^3 - 2x^2 + 6x + 9 = 0$$

eine negative Wurzel haben, und in der That sieht man bald, daß der erstern durch die Annahme $x = + 2$ und der andern durch $x = - 1$ Genüge geschieht.

§. 27. Lehrsatz.

Wenn in der Gleichung

$$f(x) = x^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} \ldots + Px + Q = 0$$

n eine gerade Zahl und das letzte Glied Q negativ $(= - \mathfrak{Q})$ ist, so hat die Gleichung allemal zwei reelle Wurzeln und zwar eine positive und eine negative.

Bew. Denn behält man die Bezeichnungen des vorherg. §. bei, und erwägt man, daß x^n, da n eine gerade Zahl sein soll, sowohl für positive, als für negative Werthe von x positiv wird, und daß daher, wenn man x hinreichend groß, sei es nun positiv $= + k$ oder negativ $= - k'$ annimmt, beidemal f(x) einer positiven Zahl gleich, etwa das einemal $= + \mathfrak{A}$ und das anderemal $= + \mathfrak{B}$ wird, so erkennt man aus der Zusammenstellung

$$x = + k \ldots f(x) = + \mathfrak{A}$$
$$x = 0 \ldots f(x) = - \mathfrak{Q}$$
$$x = - k' \ldots f(x) = + \mathfrak{B}$$

sogleich, daß zwischen $+ k$ und 0 eine positive und zwischen 0 und $- k'$ eine negative Wurzel der Gleichung liegt, indem f(x) sowohl bei dem Uebergange von $+ \mathfrak{A}$ in $- \mathfrak{Q}$, als auch bei dem Uebergange von $- \mathfrak{Q}$ in $+ \mathfrak{B}$ durch Null hindurchgehen muß.

Anm. 1. So hat z. B. die Gleichung

$$x^4 + x^3 - 3x^2 + 3x - 18 = 0$$

die beiden reellen Wurzeln

$$x = + 2 \text{ und } x = - 3.$$

(Für alle positiven oder negativen Werthe von x, welche zwischen diesen Grenzen liegen, ist die linke Seite der Gleichung negativ, und für alle Werthe von x, welche jene Grenzen überschreiten, sei es nun nach der positiven oder negativen Seite hin, wird sie beständig positiv; es kann daher die Gleichung außer den beiden angezeigten keine andern reellen Wurzeln haben.)

Anm. 2. Ist das letzte Glied einer Gleichung, deren höchster Exponent von x eine gerade Zahl ist, positiv, so findet der letzte Satz keine Anwendung; es ist möglich, daß die Gleichung dann gar keine reelle Wurzel besitzt, wie z. B. die folgende:

$$x^2 - 4x + 5 = 0;$$

es ist aber auch sehr gut möglich, daß die Gleichung reelle Wurzeln hat, wie z. B. die folgende: $x^2 + 8x + 7 = 0$, welcher die Wurzeln $x = - 1$ und $x = - 7$ angehören.

§. 28. Zusatz.

Aus §. 26 folgt, daß in einer Gleichung, deren höchster Exponent n der Unbekannten x eine gerade Zahl ist, die Zahl der reellen Wurzeln (wenn deren in der Gleichung vorhanden sind) ebenfalls eine gerade Zahl sein muß, und daß, wenn n eine ungerade Zahl ist, auch die Zahl der reellen Wurzeln allemal eine ungerade Zahl ist, wobei gleiche Wurzeln so vielmal gezählt werden, als sie in der Gleichung vorkommen.

Bew. Denn wenn $\alpha, \beta, \gamma \ldots \lambda$ die sämmtlichen reellen Wurzeln einer Gleichung

$$f(x) = 0$$

sind und man dividirt f(x) durch das Product

$$(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \ldots (x - \lambda),$$

so würde, wenn der höchste Exponent des Quotienten $\varphi(x)$ eine ungerade Zahl wäre, die Gleichung $\varphi(x) = 0$, zufolge §. 26 noch eine reelle Wurzel haben müssen, welche also auch der ursprünglichen Gleichung $f(x) = 0$

angehören würde, was gegen die Voraussetzung streitet, daß $\alpha, \beta, \gamma \ldots \lambda$ sämmtliche Wurzeln der gegebenen Gleichung sein sollen. — Demnach muß der höchste Exponent des Quotienten $\varphi(x)$ allemal eine gerade Zahl sein, wonach die Richtigkeit des Satzes in die Augen fällt.

§. 29. Zusatz.

Unter der Voraussetzung, daß eine Gleichung vom nten Grade auch n reelle oder imaginäre Resultate hat, (siehe die Anm. zu §. 13), läßt sich der vorherg. Satz auch dahin aussprechen, daß **die Zahl der in einer Gleichung enthaltenen imaginären Wurzeln allemal eine gerade Zahl ist.**

Anm. Der so eben angeführte Satz geht auch noch als ein unmittelbares Ergebniß aus dem folgenden merkwürdigen Satze hervor:

Ist der imaginäre Ausdruck $p + q\sqrt{-1}$ **eine Wurzel einer algebraischen Gleichung, deren Coefficienten sämmtlich reell sind, so leistet auch der imaginäre Ausdruck** $p - q\sqrt{-1}$ **dieser Gleichung Genüge.**

Denn zufolge §. 14 läßt sich in der Gleichung, welche wir durch

$$f(x) = 0$$

ausdrücken wollen, die linke Seite durch

$$x - p - q\sqrt{-1}$$

ohne Rest dividiren. Nehmen wir nun an, daß diese Division den Quotienten

$$\varphi(x) + \psi(x)\sqrt{-1}$$

liefert, wo $\varphi(x)$ die Summe aller reellen, $\psi(x)\sqrt{-1}$ die Summe aller imaginären Glieder bezeichnet, so erhalten wir die Gleichung

$$f(x) = (x - p - q\sqrt{-1})\,(\varphi(x) + \psi(x)\sqrt{-1})$$

oder $$f(x) = (x - p)\varphi(x) + q\psi(x) - (q\varphi(x) - (x - p)\psi(x))\sqrt{-1}.$$

Da aber ein imaginärer Ausdruck niemals einem reellen Ausdrucke gleich sein kann, so folgt aus dieser Gleichung

$$q\varphi(x) - (x - p)\psi x = 0.$$

Wir werden daher auch setzen können

$$f(x) = (x - p)\,\varphi(x) + q\psi(x) + (q\varphi(x) - (x - p)\,\psi(x))\sqrt{-1},$$

d. h. $$f(x) = (x - p + q\sqrt{-1})\,.\,(\varphi(x) - \psi(x)\sqrt{-1}).$$

Da sich hiernach $f(x)$ durch $x - p + q\sqrt{-1}$ ohne Rest dividiren läßt, so ist folglich auch

$$x = p - q\sqrt{-1}$$

eine Wurzel der gegebenen Gleichung $f(x) = 0$.

Weiter folgt aus dem Vorstehenden, daß, wenn

$$x = p \pm q\sqrt{-1}$$

eine Wurzel dieser Gleichung ist, **sich die linke Seite derselben durch den reellen Ausdruck**

$$(x - p - q\sqrt{-1})\,(x - p + q\sqrt{-1}) = x^2 - 2px + p^2 + q^2$$

ohne Rest dividiren läßt.

§. 30. Zusatz.

Man kann die vorhergehenden Sätze benutzen, um **höhere Gleichungen** durch **Näherung** aufzulösen. Das Verfahren möge das folgende Beispiel erläutern.

$$f(x) = x^3 + 6x^2 - 8x - 9 = 0.$$

Da die Gleichung nach §. 26 ein positives Resultat haben muß, indem das letzte Glied negativ ist, so setze man in derselben nach der Reihe die Zahlen 0, 1, 2 . . . und man findet für

$$x = 1 \ldots f(x) = -10,$$

für $$x = 2 \ldots f(x) = +7.$$

Demnach hat die Gleichung eine Wurzel zwischen 1 und 2; man setze daher, um diese in engere Grenzen einzuschließen, statt x nach der Reihe die Zahlen 1,1; 1,2; 1,3; 1,4; . . . 1,9 und sehe zu, für welche zwei auf einander folgende von diesen Zahlen der Zeichenwechsel der zugehörigen Werthe von f(x) eintritt; alsdann findet man für

$$x = 1{,}7,\ f(x) = -0{,}347$$

und für $$x = 1{,}8,\ f(x) = +1{,}872.$$

Da hiernach eine Wurzel der Gleichung zwischen $x = 1{,}7$ und $x = 1{,}8$ liegen muß, so setze man statt x nach der Reihe die Zahlen 1,71; 1,72; 1,73; . . . 1,79 und bemerke wieder, wo der Wechsel des Zeichens vor dem zugehörigen Werthe von f(x) stattfindet. Im vorliegenden Falle wird für

$$x = 1{,}71,\ f(x) = -0{,}135189$$

und für $$x = 1{,}72,\ f(x) = +0{,}078848;$$

also liegt eine Wurzel der Gleichung zwischen 1,71 und 1,72. — Auf ähnliche Weise kann man nun fortfahren und den gesuchten Werth in immer engere Grenzen einschließen.

Anm. 1. Dieses Verfahren wird aber besonders durch die vergeblichen Versuche weitläufig, welche man zu machen hat, ehe man zu zwei Werthen von x gelangt, für welche sich das Zeichen von f(x) ändert. Um diese Weitläufigkeit etwas zu vermeiden, kann Folgendes dienen: Man hat oben gesehen, daß für

$$x = 1 \ldots f(x) = -10$$

und für $$x = 2 \ldots f(x) = +7$$

wird; da nun + 7 von Null weniger verschieden ist, als — 10, so läßt sich vermuthen, daß auch der wahre Werth von x näher an 2, als an 1 fallen wird, wie dies auch die weitere Rechnung bestätigt hat. Aber man kann sogar mit einiger Wahrscheinlichkeit so weiter schließen: Wenn x von 1 in 2 übergeht, so geht f(x) von — 10 in + 7 über; ändert also x seinen Werth um 1, so ändert f(x) seinen um 17, welches aber zuviel ist; soll nun f(x) sich nur um 10 ändern, so dürfte auch x sich um weniger ändern müssen, etwa um $\frac{10}{17} = 0{,}6$. Man würde also hiernach sogleich

$$x = 1{,}6$$

setzen; dann, weil der zugehörige Werth von f(x) negativ ist, $x = 1{,}7$ annehmen, und weil auch dieses noch f(x) negativ macht, endlich $x = 1{,}8$ setzen, wofür f(x) positiv wird. Nun kann man auf ähnliche Weise weiterschließen:

Für $$x = 1{,}7 \text{ wird } f(x) = -0{,}347$$

und für $$x = 1{,}8 \text{ wird } f(x) = +1{,}872;$$

also wenn der Werth von x um $\frac{1}{10}$ wächst, nimmt f(x) um 2,219 zu; um wie viel wird x wachsen müssen, damit f(x) nur um 0,347 zunehme? Die ziemlich wahrscheinliche Antwort ist: um

$$\frac{0{,}347 \cdot \frac{1}{10}}{2{,}219} = 0{,}016.$$

Hiernach dürfte also der wahre Werth von x zwischen 1,71 und 1,72 zu suchen und mit diesen beiden Zahlen die Rechnung zu beginnen sein, und man hat bereits gesehen,

daß wirklich für diese beiden Werthe von x ein Zeichenwechsel für f(x) eintritt. Es war nämlich für $x = 1{,}71 \ldots f(x) = -0{,}135189$
und für $x = 1{,}72 \ldots f(x) = +0{,}078848$;
man wird folglich nach der mehrmals angewandten Schlußfolge, als verbesserten Werth

$$x = 1{,}71 + \frac{0{,}135189 \,.\, 0{,}01}{0{,}214037} = 1{,}7163$$

annehmen können.

Ist überhaupt für

$$x = \alpha \ldots f(x) = -\mathfrak{A}$$

und für

$$x = \alpha + \delta \ldots f(x) = +\mathfrak{B},$$

so wird man nach der hier angewandten Schlußweise sagen können: Aendert sich x und δ, so ändert sich f(x) um $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$; soll sich also f(x) nur um $\mathfrak{A}$ ändern, so wird sich x nur um

$$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}} \,.\, \delta$$

ändern dürfen, und man wird daher als verbesserten Werth

$$x = \alpha + \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}} \,.\, \delta$$

annehmen. — Diese Schlußweise ist aber, (wie selbst aus der obigen Rechnung hervorgeht), nicht streng richtig, kann jedoch, wie man so eben gesehen hat, zur Abkürzung der Rechnung dienen.

Die vorgelegte Gleichung hat außer der gefundenen positiven Wurzel 1,7163 noch zwei andere negative Wurzeln, die eine zwischen 0 und — 1 und die andere zwischen — 6 und — 7. Um diese zu erhalten, ist es bequemer, in der gegebenen Gleichung $x = -y$ zu setzen, wodurch dieselbe übergeht in

$$y^3 - 6y^2 - 8y + 9 = 0.$$

Um nun nach dem obigen Verfahren die zwischen 0 und 1 liegende Wurzel zu bestimmen, hat man folgende Rechnung auszuführen:

$$1)\quad y = 0 \ldots f(y) = +9$$
$$y = 1 \ldots f(y) = -4,$$

verbessertes
$$y = 0 + \frac{9}{13} = 0{,}7.$$

$$2)\quad y = 0{,}7 \ldots f(y) = +0{,}803$$
$$y = 0{,}8 \ldots f(y) = -0{,}728,$$

verbessertes
$$y = 0{,}7 + \frac{0{,}803 \,.\, 0{,}1}{1{,}531} = 0{,}75.$$

$$3)\quad y = 0{,}75 \ldots f(y) = +0{,}046875$$
$$y = 0{,}76 \ldots f(y) = -0{,}106624$$

verbessertes
$$y = 0{,}75 + \frac{0{,}046875 \,.\, 0{,}01}{0{,}153499} = 0{,}7531.$$

Aus diesem Werthe von y folgt als zweite Auflösung der ursprünglich gegebenen Gleichung

$$x = -0{,}7531.$$

Da nach §. 20 die Summe der Wurzeln dem Coefficienten des zweiten Gliedes mit entgegengesetztem Vorzeichen, hier also = — 6 sein muß, so ergibt sich, wenn man die Summe der beiden gefundenen Wurzeln von — 6 subtrahirt, als dritte Wurzel

$$x = -6{,}9632.$$

Zu weiterer Uebung können folgende Beispiele dienen

1) $x^3 - 12x^2 + 57x - 94 = 0$
$x = 3{,}36216.$

2) $x^3 - 2x - 5 = 0$
$x = 2{,}09455.$

3) $x^3 - 2x^2 - 19x + 23 = 0$
$x = 1{,}151$, $x = 4{,}914$ und $x = -4{,}065$

4) $x^4 - 4x^3 - 3x + 27 = 0$
$x = 2{,}2675$ und $x = 3{,}6797.$

5) $x^5 - 11x^3 - 28x^2 - 12x - 28 = 0$
$x = 4{,}302.$

Anm. 2. Das Vorhergehende wird ausreichen, dem Leser zu zeigen, wie es überhaupt möglich ist, für die Wurzeln höherer Gleichungen, deren Coefficienten gegeben sind, Näherungswerthe zu finden. Die Entwicklung der von den Mathematikern ermittelten verschiedenen Methoden, um möglichst rasch und sicher zum Ziele zu gelangen, würde die Grenzen dieser Schrift überschreiten.

Das im Vorstehenden angewendete Verfahren, welches mit dem Namen der regula falsi bezeichnet wird, kann auch zur Auflösung transcendenter Gleichungen benutzt werden. Als Beispiel möge die folgende Gleichung

$$x^a = a^x,$$

oder, wenn man beiderseits logarithmirt,

$$a \log x = x \log a$$

dienen, zu deren allgemeiner Auflösung, wenn von dem Resultate

$$x = a$$

abgesehen wird, wenigstens sämmtliche bisher entwickelten Lehren in keiner Art ausreichen würden. Gibt man aber dem a einen bestimmten Werth, indem man z. B. $a = 5$ setzt, so erhält man die Gleichung $5 \log x = x \log 5$

oder $$f(x) = \log x - \frac{x \log 5}{5} = \log x - x \,.\, 0{,}13979,$$

eine Gleichung, welche sich ohne alle Schwierigkeit nach dem obigen Verfahren behandeln läßt. Es ist nämlich

1) für $x = 1 \ldots f(x) = -0{,}13979$
und für $x = 2 \ldots f(x) = +0{,}02145,$
hiernach verbessertes $$x = 1 + \frac{0{,}13979}{0{,}16124} = 1{,}9.$$

2) für $x = 1{,}9 \ldots f(x) = +0{,}01315,$
für $x = 1{,}8 \ldots f(x) = +0{,}00365,$

und wenn man auch noch $x = 1{,}7$ setzt, da $f(x)$ für $x = 1{,}8$ ebenso, wie für $x = 1{,}9$ positiv geworden ist, während die Annahme $x = 1$ einen negativen Werth für $f(x)$ geliefert hat: für $x = 1{,}7 \ldots f(x) = -0{,}00719;$

hiernach verbessertes $$x = 1{,}7 + \frac{0{,}00719 \,.\, 0{,}1}{0{,}01084} = 1{,}76;$$

3) für $x = 1{,}76 \ldots f(x) = -0{,}00052$
für $x = 1{,}77 \ldots f(x) = +0{,}00054,$

hiernach verbessertes $$x = 1{,}76 + \frac{0{,}00052 \,.\, 0{,}01}{0{,}00106} = 1{,}7649;$$

und dieser Werth von x ist noch in der letzten Decimalstelle richtig.

In ganz ähnlicher Art lassen sich auch die beiden folgenden Aufgaben aus der Kreislehre behandeln.

1) Den Kreisausschnitt zu finden, welcher durch seine Sehne halbirt wird.

Aufl. Bezeichnet man die Zahl der Grade des zugehörigen Centriwinkels mit x, so ist bekanntlich der Inhalt des Ausschnitts

$$= \frac{r^2 \pi x}{360}$$

und der Inhalt des durch die Sehne abgeschnittenen Dreiecks

$$= \tfrac{1}{2} r^2 \sin x,$$

folglich, da dieses die Hälfte des Ausschnitts sein soll, die aufzulösende Gleichung

$$\frac{r^2 \pi x}{360} = r^2 \sin x \text{ oder } \frac{\pi x}{360} - \sin x = 0$$

und hieraus $x = 108^0\, 36'$.

2) Den Abschnitt zu bestimmen, welcher dem vierten Theile des Kreises gleich ist.

Aufl. Es sei wieder x der in Graden ausgedrückte Bogen des Abschnitts; dann ist bekanntlich der Inhalt des Abschnitts

$$= \frac{r^2 \pi x}{360} - \frac{x}{2} r^2 \sin x\text{*)},$$

und da der Inhalt des Kreises $= r^2 \pi$ ist, so ist die aufzulösende Gleichung:

$$\frac{r^2 \pi x}{360} - \frac{x}{2} r^2 \sin x = \frac{x}{4} r^2 \pi$$

oder

$$\frac{\pi}{180}(x - 90) - \sin x = 0,$$

oder wenn man $x = 90 + y$, also $\sin x = \cos y$ setzt,

$$\frac{\pi y}{180} - \cos y = 0$$

und hieraus $y = 42^0\, 21'$, also $x = 132^0\, 21'$.

Bemerk. Im Vorhergehenden ist nur von der Auflösung einer Gleichung mit einer Unbekannten die Rede gewesen; man wird aber hierauf die Auflösung mehrerer Gleichungen mit mehreren Unbekannten leicht zurückführen können, wenn man im Stande ist, die Unbekannten zwischen den gegebenen Gleichungen zu eliminiren. Für diesen Zweck pflegt man die Gleichungen, zwischen denen eine Unbekannte, z. B. x eliminirt werden soll, nach den Potenzen dieser Unbekannten zu ordnen, und gibt also z. B. der folgenden Gleichung:

$$3x^2y + 2xy^2 + 5y^3 - 7x^2 + 3xy - 4x - 2y + 5 = 0$$

diese Form:

$$(3y - 7)x^2 + (2y^2 + 3y - 4)x + (5y^3 - 2y + 5) = 0.$$

§. 31. Aufgabe.

Die Unbekannte x zwischen zwei höheren Gleichungen zu eliminiren.

---

*) Trigonometrie §. 79.

Aufl. Die gegebenen Gleichungen seien folgende:

$$1.\ a)\quad Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

und

$$1.\ b)\quad ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

wo die Coefficienten A, B, C, D und a, b, c, d zwar kein x, wohl aber alle andern Unbekannten y, z ... enthalten dürfen. Wenn man die obere Gleichung mit a und die untere mit A multiplicirt *) und dann die entstandenen Gleichungen von einander subtrahirt, so erhält man eine neue Gleichung, in welcher x^3 fehlt und die daher folgende Form haben wird:

$$2.\ a)\quad A'x^2 + B'x + C' = 0.$$

Multiplicirt man hierauf (1. a) mit d und (1. b) mit D, subtrahirt dann ebenfalls und dividirt im Rest alle Glieder mit x, so erhält man wieder eine Gleichung ohne x^3 und also von der Form

$$2.\ b)\quad a'x^2 + b'x + c' = 0.$$

Aus den Gleichungen (2. a) und (2. b) leitet man auf ganz gleiche Weise zwei neue Gleichungen ab, in denen x^2 fehlt, und die folglich diese Form haben:

$$3.\ a)\quad A''x + B'' = 0$$

$$3.\ b)\quad a''x + b'' = 0.$$

Da diese beiden Gleichungen in Beziehung auf x vom ersten Grade sind, so wird man nach einem der bekannten Verfahren, wie eine Unbekannte zwischen zwei Gleichungen vom ersten Grade eliminirt wird, aus denselben die gesuchte Eliminationsgleichung bilden.

Es liegt auf der Hand, daß man das nämliche Verfahren nicht 3mal, sondern nmal anzuwenden hat, wenn die gegebenen Gleichungen nicht vom 3ten, sondern vom nten Grade sind. — Es könnte aber auch der höchste Exponent von x in den gegebenen Gleichungen verschieden sein, wie in den beiden folgenden:

$$Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F = 0$$

und

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

In diesem Falle wird man die untere Gleichung mit Ax^2 und die obere mit a multipliciren und die entstandenen Gleichungen von einander subtrahiren, wodurch man offenbar eine Gleichung vom 4ten Grade erhält; aus dieser und der zweiten gegebenen Gleichung leitet man auf ähnliche Weise eine neue Gleichung vom dritten Grade ab, und aus dieser und der zweiten ursprünglichen Gleichung wird dann x nach dem vorher gelehrten Verfahren eliminirt.

Anm. Das hier angegebene, sehr leicht zu fassende Eliminationsverfahren leidet an der Unvollkommenheit, daß die Eliminationsgleichung nicht nothwendig bloß die Resultate der gegebenen Gleichungen enthält, sondern außer diesen noch andere enthalten kann. Wir übergehen jedoch die ziemlich umständlichen Methoden, durch welche dieser Uebelstand vermieden werden kann, da wir es für die Zwecke dieser Schrift ausreichend halten, wenn gezeigt wird, wie es überhaupt möglich ist, zwischen zwei höheren Gleichungen eine Unbekannte zu eliminiren.

§. 32. Aufgabe.

Eine irrationale algebraische Gleichung rational zu machen.

Aufl. Enthält die Gleichung nur einen einzigen Wurzelausdruck, wie die folgende:

$$A + \sqrt[m]{B} = 0,$$

---

*) Sollten die Coefficienten A und a einen gemeinschaftlichen Factor f haben, so wird man natürlich die obere Gleichung nur mit a:f und die untere mit A:f multipliciren.

wo A die Summe aller der Glieder bezeichnen soll, welche keine Unbekannte unter einem Wurzelzeichen enthalten, so wird man die Wurzel auf eine Seite schaffen und dann mit dem Exponenten derselben potenziren, woraus sich die rationale Gleichung

$$B = (-A)^m$$

ergibt.

Wenn aber eine Gleichung mehrere Glieder mit Wurzelausdrücken enthält, so reicht dieses Verfahren des Potenzirens, wie man leicht einsieht, nicht aus, indem durch dasselbe im allgemeinen die Zahl der Wurzelausdrücke nicht vermindert, sondern vermehrt werden würde. Man kann indeß mit Hülfe des vorherg. §. den vorgesteckten Zweck erreichen. Ist nämlich z. B. eine Gleichung mit drei Wurzelzeichen gegeben:

$$A + \sqrt[m]{B} + \sqrt[n]{C} + \sqrt[p]{D} = 0,$$

so setze man

$$1) \quad \sqrt[m]{B} = u, \quad \sqrt[n]{C} = v, \quad \sqrt[p]{D} = w,$$

wobei es sich von selbst versteht, daß die Buchstaben u, v, w nicht in der gegebenen Gleichung selbst vorkommen dürfen, und eliminire dann nach einander u, v, w zwischen den Gleichungen

$$A + u + v + w = 0,$$
$$u^m = B,$$
$$v^n = C,$$

und

$$w^p = D.$$

Die Eliminationsgleichung ist die gesuchte rationale Gleichung.

C. Von der Auflösung der cubischen Gleichungen insbesondere.

§. 33. Erklärung.

Eine cubische Gleichung heißt eine reducirte, wenn der Coefficient des zweiten Gliedes Null ist, also das Quadrat der Unbekannten in der Gleichung nicht vorkommt.

§. 34. Zusatz.

Jede cubische Gleichung:

$$x^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

läßt sich in eine reducirte umformen; man braucht nämlich nur $x = y - \frac{1}{3}B$ zu setzen; denn durch diese Substitution verwandelt sich die obige Gleichung in

$$\left.\begin{aligned} x^3 &= y^3 - By^2 + \tfrac{1}{3}B^2y - \tfrac{1}{27}B^3 \\ +Bx^2 &= + By^2 - \tfrac{2}{3}B^2y + \tfrac{1}{9}B^3 \\ +Cx &= + Cy - \tfrac{1}{3}BC \\ +D &= + D \end{aligned}\right\} = 0$$

oder

$$y^3 + (C - \tfrac{1}{3}B^2)y + (\tfrac{2}{27}B^3 - \tfrac{1}{3}BC + D) = 0.$$

Anm. So erhält man z. B. aus der Gleichung

$$x^3 - 18x^2 + 87x - 110 = 0,$$

wenn man $x = y + 6$ setzt, die reducirte Gleichung

$$\left.\begin{aligned} x^3 &= y^3 + 18y^2 + 108y + 216 \\ -18x^2 &= - 18y^2 - 216y - 648 \\ +87x &= + 87y + 522 \\ -110 &= - 110 \end{aligned}\right\} = 0$$

oder

$$y^3 - 21y - 20 = 0,$$

und da dieser Gleichung die Wurzeln

$$y = -4,\ y = -1 \text{ und } y = 5$$

angehören, so hat die ursprüngliche Gleichung die Wurzeln

$$x = 2,\ x = 5 \text{ und } x = 11.$$

§. 35. Zusatz.

Hat die reducirte cubische Gleichung

$$x^3 + px + q = 0$$

drei reelle Wurzeln α, β, γ, so ist nach §. 20, 4. die Summe derselben $= 0$. Es müssen sich daher unter ihnen entweder zwei positive und eine negative, oder zwei negative und eine positive befinden, je nachdem $q = -\alpha\beta\gamma$ positiv oder negativ ist. Auch ist noch leicht zu sehen, daß die Gleichung nur dann drei reelle Wurzeln haben kann, wenn p negativ ist. Denn ist p positiv, so kann die obige Gleichung offenbar keine positive Wurzel haben, wenn zugleich q positiv ist, und keine negative, wenn p negativ ist. Es kann daher in beiden Fällen die Gleichung nur eine reelle Wurzel haben, und zwar im ersten Falle eine negative, im andern eine positive.

§. 36. Aufgabe.

Die reducirte cubische Gleichung:

$$x^3 + px = -q$$

nach x aufzulösen.

Aufl. Man denke sich x als aus zwei Theilen u und v bestehend und setze $x = u + v$ in die gegebene Gleichung, so erhält man

$$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + p(u + v) = -q$$

oder

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) = -q.$$

Da einer der beiden zu suchenden Theile u oder v ganz willkürlich angenommen werden kann, so denke man sich z. B. dem u einen solchen Werth beigelegt, daß $3uv + p = 0$ oder $u = -\frac{p}{3v}$ wird. Hierdurch geht die obige Gleichung zunächst über in

$$u^3 + v^3 = -q,$$

und wenn man in derselben nach der Annahme $u = -\frac{p}{3v}$ setzt,

$$-\frac{p^3}{27v^3} + v^3 = -q$$

oder

$$v^6 + qv^3 = +\tfrac{1}{27}p^3.$$

Setzt man in dieser Gleichung $v^3 = z$, so verwandelt sich dieselbe in

$$z^2 + qz = +\tfrac{1}{27}p^3,$$

woraus auf bekannte Weise folgt

$$v^3 = z = -\tfrac{1}{2}q \pm \sqrt{(\tfrac{1}{27}p^3 + \tfrac{1}{4}q^2)},$$

also

$$u^3 = -q - v^3 = -\tfrac{1}{2}q \mp \sqrt{(\tfrac{1}{27}p^3 + \tfrac{1}{4}q^2)}.$$

Da hiernach u und v ihre Werthe vertauschen, so hat man nur nöthig, das eine Paar derselben zu berücksichtigen, und man erhält nun

$$x = u + v = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{(\tfrac{1}{27}p^3 + \tfrac{1}{4}q^2)}} + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{(\tfrac{1}{27}p^3 + \tfrac{1}{4}q^2)}}.$$

Anm. 1. Diese Formel wird die Cardanische genannt, weil sie zuerst (1545) nebst dem Beweise von Cardano mitgetheilt, (obschon bereits früher von andern aufgefunden) worden ist. Dieselbe liefert, wenn $27q^2 + 4p^3 \gtreqless 0$ ist, für x eine reelle Wurzel; sie stellt dagegen den Werth von x in imaginärer Form dar, wenn $27q^2 + 4p^3 < 0$ ist. Wir werden jedoch sogleich sehen, daß gerade in diesem letzteren Falle die Gleichung drei reelle Resultate hat.

Nach §. 26 hat die Gleichung

$$x^3 + px + q = 0$$

wenigstens eine reelle Wurzel; bezeichnen wir nun diese reelle Wurzel, wenn die Gleichung überhaupt nur eine solche hat, oder wenn sie drei reelle Wurzeln haben sollte, eine derselben mit 2α, wo also α eine positive oder negative Zahl oder Null bedeutet, so ist nach § 20, 4 die Summe der beiden andern Wurzeln $= -2\alpha$, und wenn wir die Differenz dieser Wurzeln mit 2β bezeichnen, wo β eben sowohl reell als imaginär sein kann, so erhalten wir für die drei Wurzeln der obigen Gleichung die Zusammenstellung

$$\text{A)} \quad +2\alpha, \quad -(\alpha - \beta), \quad -(\alpha + \beta).$$

Zufolge §§. 16 und 9 ist

$$p = -2\alpha(\alpha - \beta) - 2\alpha(\alpha + \beta) + (\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = -(3\alpha^2 + \beta^2)$$

und $q = -2\alpha(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = -2(\alpha^3 - \alpha\beta^2)$,

folglich $\quad$ B) $4p^3 + 27q^2 = -4\beta^2(9\alpha^2 - \beta^2)^2$.

Nun können überhaupt drei Fälle stattfinden; es kann nämlich

$$1) \quad 4p^3 + 27q^2 = 0$$

sein. Dieser Fall tritt ein, wenn entweder $\beta = 0$ oder $\beta = \pm 3\alpha$ ist; beidemal hat die Gleichung dann drei reelle Wurzeln, von denen zwei einander gleich sind, die dritte aber diesen dem Vorzeichen nach entgegengesetzt und numerisch doppelt so groß ist. Ist nämlich $\beta = 0$, so sind zufolge der obigen Zusammenstellung die drei Wurzeln $+2\alpha$, $-\alpha$ und $-\alpha$, und ist $\beta = \pm 3\alpha$, so sind diese Wurzeln $+2\alpha$, $+2\alpha$ und -4α, was im wesentlichen mit der vorhergehenden Angabe auf eins hinausläuft, mit der einzigen Verschiedenheit, daß jetzt die gleiche und vorhin die doppelt so große Wurzeln mit 2α bezeichnet worden ist.

Aus der Cardanischen Formel ergibt sich beidemal

$$x = -2\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q};$$

und da das Product aller drei Wurzeln $= -q$ und ihre Summe $= 0$ sein muß, so sind folglich die beiden andern Wurzeln

$$x = +\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q} \text{ und } +\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q}.$$

Die Cardanische Formel liefert also die doppelt so große Wurzel.

Da nach der Annahme α einen reellen und β entweder ebenfalls einen reellen oder zufolge §. 29 einen eingliedrigen imaginären Ausdruck von der Form $\pm \beta' \sqrt{-1}$, (wo β' als reell gedacht wird), vorstellt, so ist in der Gleichung (B) der Factor der rechten Seite $(9\alpha^2 - \beta^2)^2$ jedenfalls positiv; es kann daher

$$2) \quad 4p^3 + 27q^2 > 0$$

nur dann sein, wenn β imaginär $(= \pm \beta' \sqrt{-1})$ ist. Die Gleichung hat dann vermöge der unter (A) aufgeführten Zusammenstellung nur eine reelle, durch die Cardanische Formel angegebene Wurzel, während die beiden andern Wurzeln imaginär sind.

Die Gleichung hat endlich, so wie in dem ersten Falle, drei reelle Resultate, die aber sämmtlich von einander verschieden sind, wenn β reell und folglich

$$3)\quad 4p^3 + 27q^2 < 0$$

ist. — Wie nun in diesem letzteren Falle, auf welchen sich die Cardanische Formel nicht ohne weitere Umformung*) anwenden läßt, und welcher der casus irreductibilis genannt wird, die drei reellen Resultate der Gleichung bequem erhalten werden können, werden wir in der Anm. 2 zeigen; vorher behandeln wir einige Beispiele, bei denen die Cardanische Formel Anwendung findet.

$$1)\quad x^3 - 12x + 16 = 0.$$

Da hier $p = -12$, $q = +16$, also $(\frac{1}{3}p)^3 + (\frac{1}{2}q)^2 = 0$ ist, so sind die Resultate dieser Gleichung

$$x = -4,\ x = +2 \text{ und } x = +2.$$

$$2)\quad x^3 - 6x - 9 = 0.$$

Hier ist $p = -6$ und $q = -9$, folglich nach der Cardanischen Formel

$$x = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1} = 3.$$

$$3)\quad x^3 - 3x + 18 = 0.$$

Aus der Cardanischen Formel ergibt sich

$$x = \sqrt[3]{-9 + \sqrt{80}} + \sqrt[3]{-9 - \sqrt{80}} = -\sqrt[3]{9 - 4\sqrt{5}} - \sqrt[3]{9 + 4\sqrt{5}}.$$

Auf dem Wege des Versuches aber findet man, daß

$$9 - 4\sqrt{5} = \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)^3 \text{ und } 9 + 4\sqrt{5} = \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^3$$

ist, wonach sich das so eben erhaltene Resultat verwandelt in

$$x = -\left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right) = -3.$$

$$4)\quad x^3 - 12x^2 + 49x - 70 = 0.$$

Wir verwandeln zunächst die gegebene Gleichung in eine reducirte, indem wir $x = y + 4$ setzen, und erhalten so

$$y^3 + y - 2 = 0$$

und hieraus nach der Cardanischen Formel

$$y = \sqrt[3]{\left(\frac{27 + 6\sqrt{21}}{27}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{27 - 6\sqrt{21}}{27}\right)} = \tfrac{1}{6}(3 + \sqrt{21}) + \tfrac{1}{6}(3 - \sqrt{21}),$$

also $y = 1$ und folglich $x = 5$.

$$5)\quad x^3 - 3x - 3\tfrac{1}{2} = 0.$$

Zufolge der Cardanischen Formel ergibt sich

$$x = \sqrt[3]{\frac{7 + \sqrt{33}}{4}} + \sqrt[3]{\frac{7 - \sqrt{33}}{4}} = 2{,}151\ldots$$

Man sieht aus den Beispielen (3) und (4), daß selbst dann, wenn die cubische Gleichung eine rationale Wurzel hat, die Herbeiführung derselben nach der Cardanischen Formel häufig nur bei Anwendung besonderer Kunstgriffe ohne weitläufige Rechnung gelingt, in welche man unvermeidlich verfällt, wenn man mit Hilfe dieser Formel eine irrationale Wurzel zu erhalten sucht. Man gelangt daher bei rationalen Wurzeln in der Regel viel rascher zum Ziele, wenn man dieselben nach Anleitung des §. 21 sucht.

---

*) Vergl. unten §. 78, Anm.

Anm. 2. In der Trigonometrie*) wird folgende Gleichung erwiesen:

$$\text{A)}\quad \sin\varphi^3 - \tfrac{3}{4}\sin\varphi + \tfrac{1}{4}\sin 3\varphi = 0.$$

Setzt man hier $\sin\varphi = \frac{x}{r}$, wo r einen nach Bequemlichkeit der Rechnung noch näher zu bestimmenden Ausdruck bezeichnet, so erhält man

$$\frac{x^3}{r^3} - \frac{3}{4}\cdot\frac{x}{r} + \tfrac{1}{4}\sin 3\varphi = 0$$

oder

$$\text{B)}\quad x^3 - \tfrac{3}{4}r^2x + \tfrac{1}{4}r^3\sin 3\varphi = 0$$

eine Gleichung, welcher durch die Annahme

$$\text{C)}\quad x = r\sin\varphi$$

Genüge geschieht.

Hierdurch wird man in den Stand gesetzt, jede cubische Gleichung, welche sich auf die Form der Gleichung (A) bringen läßt, mit Hülfe trigonometrischer Tafeln rasch und leicht vollständig aufzulösen. Ist zunächst eine reducirte Gleichung von der folgenden Form

$$\text{D)}\quad x^3 - px + q = 0$$

gegeben, wo jetzt p und q ausschließlich positive Zahlen bezeichnen sollen, so hat man, um diese Gleichung auf die obige Form zu bringen, nur nöthig,

$$\tfrac{3}{4}r^2 = p \text{ und } \tfrac{1}{4}r^3\sin 3\varphi = q,$$

d. h.

$$r = 2\sqrt{\frac{p}{3}} \text{ und } \sin 3\varphi = \frac{4q}{r^3} = \frac{3q}{2p}\cdot\sqrt{\frac{3}{p}}$$

zu setzen. — Bestimmt man nun aus den Tafeln einen spitzen Winkel α, dessen Sinus $= \frac{3q}{2p}\cdot\sqrt{\frac{3}{p}}$ ist, so ist $3\varphi = \alpha$, also $\varphi = \frac{1}{3}\alpha$ und nach Gleichung (C)

$$1)\quad x = r\sin\varphi = 2\sin\frac{\alpha}{3}\cdot\sqrt{\frac{p}{3}}.$$

Weil aber der Winkel α mit seinem Nebenwinkel $180 - \alpha$ und mit dem negativen Winkel $-(180 + \alpha)$ einerlei Sinus hat, so wird man eben so gut auch $3\varphi = 180 - \alpha$, also $\varphi = 60 - \frac{\alpha}{3}$ und $3\varphi = -(180 + \alpha)$, also $\varphi = -\left(60 + \frac{\alpha}{3}\right)$ setzen können und demgemäß der obigen Wurzel noch zwei andere hinzuzufügen haben.

Hiernach sind also die vollständigen Auflösungen der Gleichung

$$\text{D)}\quad x^3 - px + q = 0,$$

nachdem

$$\sin\alpha = \frac{3q}{2p}\cdot\sqrt{\frac{3}{p}}$$

gefunden ist, folgende:

$$1)\quad x = 2\sin\frac{\alpha}{3}\cdot\sqrt{\frac{p}{3}}$$

$$2)\quad x = 2\sin\left(60 - \frac{\alpha}{3}\right)\cdot\sqrt{\frac{p}{3}}$$

$$3)\quad x = -2\sin\left(60 + \frac{\alpha}{3}\right)\cdot\sqrt{\frac{p}{3}}.$$

---

*) Anfangsgründe der Trigonometrie. Vierte Auflage. §. 30.

Ist z. B. die Gleichung

$$x^3 - 20x + 23 = 0$$

gegeben, so ist $\alpha = 41^0\ 55{,}1'$, also $\frac{1}{3}\alpha = 13^0\ 58{,}4'$ und die drei Werthe von x sind:

$$+1{,}247; \quad +3{,}716; \quad -4{,}963.$$

Hat die gegebene Gleichung die Form

$$(\text{E})\quad x^3 - px - q = 0,$$

so sind, wie man leicht sieht, ihre Wurzeln die entgegengesetzten der vorher behandelten Gleichung. — Wäre dagegen eine Gleichung von der Form

$$x^3 + px \pm q = 0$$

gegeben, so würde sie sich gar nicht auf die Form der Gleichung (B) bringen lassen.

Eben so verliert die trigonometrische Auflösung ihre Anwendbarkeit, wenn in einer der Gleichungen (D) und (E) $3q\sqrt{3} > 2p\sqrt{p}$, also $27q^2 > 4p^3$ sein sollte, da niemals ein Sinus > 1 werden kann. In beiden Fällen aber läßt sich zufolge Anm. 1 *) die Gleichung nach der Cardanischen Formel behandeln.

Zur Uebung für die trigonometrische Auflösung fügen wir noch folgende Beispiele hinzu:

1) $x^3 - 8x - 1 = 0;$

$x = +2{,}889 \quad x = -0{,}125 \quad x = -2{,}764$

2) $x^3 - 20x + 23 = 0;$

$x = +3{,}716 \quad x = +1{,}247 \quad x = -4{,}963$

3) $x^3 - x^2 - 16x + 18 = 0;$

$x = +1{,}136 \quad x = +3{,}913 \quad x = -4{,}049.$

Bemerk. So wie die cubischen Gleichungen nach der Cardanischen Formel gelöst werden können, so lassen sich auch biquadratische Gleichungen nach allgemeinen Formeln auflösen, welche jedoch noch weitläufiger und für die praktische Anwendung noch weniger geeignet sind, als die Cardanische Formel.

Anhang.

Von den reciproken Gleichungen.

Eine geordnete algebraische Gleichung, in welcher je zwei von dem Ende gleich weit abstehende Glieder gleiche Coefficienten entweder sämmtlich mit dem nämlichen oder sämmtlich mit entgegengesetzten Vorzeichen haben, wird eine reciproke genannt. Ist der höchste Exponent von x eine ungerade Zahl, z. B. $= 5$, so ist das Schema einer reciproken Gleichung für den ersten Fall

$$x^5 + ax^4 + bx^3 + bx^2 + ax + 1 = 0,$$

für den andern Fall

$$x^5 + ax^4 + bx^3 - bx^2 - bx - 1 = 0.$$

Ist dagegen der Exponent der höchsten Potenz von x eine gerade Zahl, z. B. $= 6$, so ist im ersten Fall das Schema einer reciproken Gleichung

$$x^6 + ax^5 + bx^4 + cx^3 + bx^2 + ax + 1 = 0,$$

---

*) Das dortige $+p$ ist hier durch $-p$ ersetzt.

in dem andern Falle

$$x^6 + ax^5 + bx^4 - bx^2 - ax - 1 = 0.$$

Das mittelste Glied (cx^3) muß nothwendig den Coefficienten Null haben; denn da dasselbe von beiden Enden gleichweit absteht, so erhalten wir für den Coefficienten desselben die Gleichung $+ c = - c$, welcher nur durch die Annahme $c = 0$ genügt werden kann. Der Kürze wegen werden wir im Folgenden zwei von den Enden gleich weit abstehende Glieder homologe Glieder nennen.

Den reciproken Gleichungen kommen folgende Eigenschaften zu:

I. Ist α eine Wurzel einer reciproken Gleichung, so ist auch die Reciproke $\frac{1}{\alpha}$ eine Wurzel dieser Gleichung. — Ist z. B. die Gleichung

$$x^5 + ax^4 + bx^3 \pm bx^2 \pm ax \pm 1 = 0$$

gegeben, so geht dieselbe, wenn wir einmal darin $x = \alpha$, das anderemal $x = \frac{1}{\alpha}$ setzen, über bei der ersten Annahme in

$$1)\quad \alpha^5 + a\alpha^4 + b\alpha^3 \pm b\alpha^2 \pm a\alpha \pm 1 = 0,$$

bei der andern Annahme in

$$2)\quad \frac{1}{\alpha^5} + \frac{a}{\alpha^4} + \frac{b}{\alpha^3} \pm \frac{b}{\alpha^2} \pm \frac{a}{\alpha} \pm 1 = 0,$$

eine Gleichung, welche mit der vorstehenden zusammenfällt, wenn man in derselben alle Glieder mit α^5 multiplicirt und für den Fall, daß die untern Vorzeichen gelten sollen, sämmtliche Vorzeichen umkehrt. Da nun zufolge der Voraussetzung die Gleichung (1) richtig ist, so muß das nämliche auch von der Gleichung (2) gelten. — Auf die so eben erwiesene Eigenschaft der reciproken Gleichungen bezieht sich der Name derselben.

II. Wenn in einer reciproken Gleichung der höchste Exponent von x eine ungerade Zahl ist, so ist $x = + 1$ oder $x = - 1$ eine Wurzel dieser Gleichung, je nachdem die homologen Glieder entgegengesetzte oder gleiche Vorzeichen haben. — Denn wenn z. B. für den ersteren Fall die Gleichung $\quad x^5 + ax^4 + bx^3 - bx^2 - ax - 1 = 0$

und für den andern Fall die Gleichung

$$x^5 + ax^4 + bx^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$$

gegeben ist, so fällt die Richtigkeit der aufgestellten Behauptung sofort in die Augen, wenn wir diese Gleichungen in folgender Weise anordnen:

$$x^5 - 1 + ax(x^3 - 1) + bx^2(x - 1) = 0$$

und

$$x^5 + 1 + ax(x^3 + 1) + bx^2(x + 1) = 0.$$

III. Ist in einer reciproken Gleichung der höchste Exponent von x eine gerade Zahl, und haben die homologen Glieder entgegengesetzte Vorzeichen, so enthält die Gleichung sowohl die Wurzel $x = + 1$, als auch $x = - 1$. — Denn wenn z. B. die Gleichung

$$x^6 + ax^5 + bx^4 - bx^2 - ax - 1 = 0$$

gegeben ist und man gibt derselben die folgende Anordnung

$$x^6 - 1 + ax(x^4 - 1) + bx^2(x^2 - 1) = 0,$$

so liegt die Richtigkeit der aufgestellten Behauptung auf der Hand.

IV. Wenn daher in einer reciproken Gleichung der höchste Exponent von x eine ungerade Zahl oder wenn der höchste Exponent von x eine gerade Zahl ist und zugleich die homologen Glieder entgegengesetzte Vorzeichen haben, so läßt sich die Auflösung

der Gleichung im ersteren Falle auf die Auflösung einer Gleichung von dem nächstniedrigeren Grade, im anderen Falle auf die Auflösung einer Gleichung von einem um zwei Einheiten niedrigeren Grade zurückführen, indem man im ersteren Falle die gegebene Gleichung entweder durch $x - 1$ oder $x + 1$, je nachdem die homologen Glieder gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben, im andern Falle durch $(x + 1)(x - 1) = x^2 - 1$ dividirt.

V. Die Division einer reciproken Gleichung, welche die Wurzel $x = +1$ oder $x = -1$ enthält, durch $x - 1$ oder $x + 1$, liefert wieder eine reciproke Gleichung. — Ist z. B. die Gleichung

$$x^6 + ax^5 + bx^4 - bx^2 - ax - 1 = 0$$

gegeben, in welcher die homologen Glieder entgegengesetzte Vorzeichen haben, und der folglich durch die Annahme $x = 1$ genügt wird, und denken wir uns, die Division dieser Gleichung durch $x - 1$ habe zu Resultaten

$$A_5x^5 + A_4x^4 + A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0 = 0$$

ergeben, so muß, wenn wir diese Gleichung mit $x - 1$ multipliciren, die als Product hervorgehende Gleichung

$$\left.\begin{matrix} A_5x^6 + A_4x^5 + A_3x^4 + A_2x^3 + A_1x^2 + A_0x \\ - A_5x^5 - A_4x^4 - A_3x^3 - A_2x^2 - A_1x - A_0 \end{matrix}\right\} = 0$$

mit der gegebenen Gleichung identisch sein. Wir erhalten daher zur Bestimmung der Coefficienten $A_5, A_4 \ldots$ die Gleichungen

$$\begin{matrix} A_5 = 1 & \text{und} & A_0 = 1 \\ A_4 - A_5 = a & \text{und} & A_1 - A_0 = a \\ A_3 - A_4 = b & \text{und} & A_2 - A_1 = b, \end{matrix}$$

aus denen offenbar

$$A_5 = A_0,\ A_4 = A_1 \text{ und } A_3 = A_2$$

hervorgeht. — In ähnlicher Art kann dasselbe in jedem andern Falle gezeigt werden.

VI. Wenn in einer Gleichung, deren höchster Exponent von x eine gerade Zahl ist, die homologen Glieder gleiche Vorzeichen haben, so läßt sich die Auflösung dieser Gleichung auf eine Gleichung zurückführen, deren höchster Exponent von x die Hälfte des höchsten Exponenten von x in der gegebenen Gleichung ist. — Wir wollen als gegeben die Gleichung

$$x^6 + ax^5 + bx^4 + cx^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$$

annehmen; wenn wir dieselbe durch x^3 dividiren und dann die Glieder mit gleichem Coefficienten zusammenfassen, so verwandelt sich dieselbe in

$$x^3 + \frac{1}{x^3} + a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0.$$

Setzen wir nun

$$x + \frac{1}{x} = y,$$

so ist $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = y^2$, also $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$,

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^3} = y^3, \text{ also } x^3 + \frac{1}{x^3} = y^3 - 3y.$$

Substituiren wir diese Werthe in die zuletzt aufgeführte Gleichung, so erhalten wir eine Gleichung vom dritten Grade, welche sich nach der Cardanischen Formel auflösen läßt.

Ist aber aus dieser y, z. B. $= \alpha^2$ gefunden, so erhalten wir die Gleichung

$$x + \frac{1}{x} = \alpha \text{ oder } x^2 - \alpha x = -1,$$

also

$$x = \frac{1}{2}\alpha \pm \sqrt{\frac{1}{4}\alpha^2 - 1}.$$

Aus dem Vorstehenden wird der Leser leicht erkennen, wie reciproke Gleichungen bis zum 7. Grade, da sich dieselben durch die Division mit $x + 1$ oder $x - 1$ allemal auf den 6. Grad zurückführen lassen, zu lösen sind*).

Zur Erläuterung des Vorgetragenen können die beiden folgenden Beispiele dienen.

$$1)\quad x^6 - \frac{35}{6}x^5 + \frac{28}{3}x^4 - \frac{28}{3}x^2 + \frac{35}{6}x - 1 = 0.$$

Vermöge Nr. III. hat die Gleichung die Wurzeln $x = +1$ und $x = -1$ und läßt sich daher durch den Factor $x^2 - 1$ ohne Rest dividiren. Diese Division liefert uns die Gleichung

$$x^4 - \frac{35}{6}x^3 + \frac{31}{3}x^2 - \frac{35}{6}x + 1 = 0,$$

welche wir zufolge Nr VI. umformen in

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - \frac{35}{6}\left(x + \frac{1}{x}\right) + \frac{31}{3} = 0.$$

Setzen wir nun, um diese Gleichung aufzulösen,

$$x + \frac{1}{x} = y, \text{ also } x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2,$$

so verwandelt sich dieselbe in

$$y^2 - \frac{35}{6}y + \frac{25}{3} = 0,$$

woraus

$$y = \frac{10}{3} \text{ oder } y = \frac{10}{4}$$

hervorgeht. Aus den Gleichungen

$$x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3} \text{ und } x + \frac{1}{x} = \frac{10}{4}$$

ergibt sich dann $x = 3$ oder $\frac{1}{3}$ und $x = 2$ oder $\frac{1}{2}$.

Hiernach sind die sämmtlichen Wurzeln der obigen Gleichung (1)

$$x = +1,\quad x = 2,\quad x = 3,$$
$$x = -1,\quad x = \tfrac{1}{2},\quad x = \tfrac{1}{3}.$$

$$2)\quad x^7 - 4x^6 + 5x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 5x^2 + 4x - 1 = 0.$$

Zufolge Nr. II. ist $x = 1$ eine Wurzel dieser Gleichung. Die Division durch $x - 1$ ergibt

$$x^6 - 3x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = 0,$$

eine Gleichung, welche wir nach Nr. VI. umformen in

$$x^3 + \frac{1}{x^3} - 3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 3 = 0.$$

Setzen wir dann weiter

$$x + \frac{1}{x} = y, \text{ also } x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2 \text{ und } x^3 + \frac{1}{x^3} = y^3 - 3y,$$

---

*) Da auch die allgemeine Auflösung der Gleichungen vom 4. und 5. Grade aufgefunden worden ist, so können reciproke Gleichungen bis zum 11. Grade aufgelöst werden.

so geht die zuletzt erhaltene Gleichung über in

$$y^3 - 3y^2 - y - 3 = 0.$$

Als Wurzeln dieser Gleichung findet man bald

$$y = +1, \quad y = -1, \quad y = +3.$$

Bildet man dem gemäß die drei Gleichungen

$$x + \frac{1}{x} = +1, \quad x + \frac{1}{x} = -1 \text{ und } x + \frac{1}{x} = +3$$

und fügt zu den Wurzeln derselben die oben angegebene Wurzel $x = 1$ hinzu, so erhält man für die sämmtlichen Wurzeln der gegebenen Gleichung folgende Zusammenstellung

$$x = 1, \; x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} = 2{,}618, \; x = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2}, \; x = -\frac{1 + \sqrt{-3}}{2},$$

$$x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = 0{,}382, \; x = \frac{1 - \sqrt{-3}}{2}, \; x = -\frac{1 - \sqrt{-3}}{2}.$$

Die gegebene Gleichung hat also überhaupt 7 Wurzeln, von denen 3 reell und 4 imaginär sind.

Wir fügen keine weiteren Uebungsbeispiele hinzu, da die reciproken Gleichungen, welche wir nur hergebrachter Weise und zu dem Zwecke hier aufgenommen haben, um die Leser nicht ohne die Kenntniß zu lassen, was überhaupt unter reciproken Gleichungen verstanden wird, kaum irgend Anwendung finden. Wer an der Auflösung reciproken, Gleichungen Vergnügen findet, wird sich bequem zu behandelnde Beispiele leicht bilden können, wenn derselbe in Gleichungen folgender Form

$$(x + \alpha)\left(x + \frac{1}{\alpha}\right) = 0$$

$$(x + \alpha)\left(x + \frac{1}{\alpha}\right)(x + \beta)\left(x + \frac{1}{\beta}\right) = 0$$

$$(x + \alpha)\left(x + \frac{1}{\alpha}\right)(x + \beta)\left(x + \frac{1}{\beta}\right)(x + \gamma)\left(x + \frac{1}{\gamma}\right) = 0$$

u. s. w. die Producte auflöst und statt α, β, γ beliebige positive oder negative, ganze oder gebrochene Zahlen setzt. Neue reciproke Gleichungen gehen aus den also erhaltenen durch Multiplication mit $x - 1$ oder $x + 1$ oder $(x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$ hervor.

Wir bemerken schließlich noch, daß auch eine Gleichung von der folgenden Form

$$x^n + akx^{n-1} + bk^2x^{n-2} \ldots\ldots \pm bk^{n-2}x^2 \pm ak^{n-1}x \pm k^n = 0$$

in eine reciproke Gleichung umgewandelt werden kann, wenn man dieselbe durch k^n dividirt und dann $\frac{x}{k} = y$ setzt.

Zweiter Abschnitt.

Von den unendlichen Reihen.

A. Von der Convergenz der unendlichen Reihen.

§. 37. Erklärung.

Eine Reihe, deren Glieder ein bestimmtes Gesetz befolgen, heißt, wenn sie ohne Ende fortlaufend gedacht wird, eine unendliche Reihe. Die

Reihe heißt convergent, wenn die Summe ihrer n ersten Glieder für ins Unendliche wachsende Werthe von n einer bestimmten Grenze (§. 2) unendlich nahekommt. Diese Grenze wird die Summe der Reihe genannt und der Reihe selbst gleich gesetzt. Eine unendliche Reihe heißt divergent, wenn sie die eben angegebene Bedingung nicht erfüllt.

In Folgendem wird fast ausschließlich von convergenten Reihen die Rede sein.

Anm. Ein Beispiel einer convergenten Reihe bietet der irrationale Decimalbruch dar, z. B.

$$\frac{2}{3} = 0{,}6666 \ldots = \frac{6}{10} + \frac{6}{10^2} + \frac{6}{10^3} + \frac{6}{10^4} + \ldots$$

Je mehr Glieder dieser Reihe vom ersten an nach einander addirt werden, um so mehr nähert sich ihre Summe dem Bruch $^2/_3$, und man kann den Unterschied zwischen dieser Summe und dem Bruche $^2/_3$, wenn man hinreichend viele Glieder addirt, so klein machen, als man immer will.

§. 38. Zusatz.

Damit eine unendliche Reihe convergent sei, ist zufolge der vorstehenden Erklärung zunächst erforderlich, daß ihre Glieder, wenn auch nicht vom ersten, doch von irgend einem Gliede an fortwährend und zuletzt bis zum Verschwinden abnehmen, und daß ferner die Summe beliebig vieler auf das nte folgender Glieder, wenn man n hinreichend groß annimmt, kleiner wird, als eine noch so kleine gegebene Zahl.

Anm. So ist z. B. in der convergenten Reihe

$$\frac{6}{10} + \frac{6}{10^2} + \frac{6}{10^3} + \frac{6}{10^4} \ldots + \frac{6}{10^n} + \ldots$$

die Summe beliebig vieler auf das nte folgender Glieder, wenn man n = 6 annimmt, kleiner als ein Milliontel, wenn man n = 12 setzt, kleiner als ein Billiontel u. s. w.

Wenn die Glieder einer unendlichen Reihe (von irgend einem Gliede an) fortwährend und ins Unendliche abnehmen, so folgt hieraus noch nicht unbedingt, daß die Reihe convergent sei. So nehmen z. B. die Glieder der unendlichen Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots.$$

zwar fortwährend ab, und das nte Glied $\left(\frac{1}{n}\right)$ wird $= 0$, wenn man $n = \infty$ setzt. Die Reihe ist aber dennoch nicht convergent. Denn wenn man die n ersten Glieder addirt, so beträgt die Summe der noch übrigen Glieder, wie groß man auch immer n annehmen mag, doch noch mehr als $^1/_2$. Das auf das nte folgende Glied ist nämlich $\frac{1}{n+1}$. Addirt man mit diesem Gliede beginnend abermals n Glieder, so ist das letzte dieser Glieder $= \frac{1}{n+n} = \frac{1}{2n}$, und da dieses das kleinste ist, so ist die aus dieser Addition hervorgehende Summe jedenfalls größer als $n \,.\, \frac{1}{2n}$, d. h. größer, als $^1/_2$. Es kann sich daher auch die Summe der n ersten Glieder der Reihe für ins Unendliche wachsende Werthe von n keiner bestimmten Grenze nähern; sie muß vielmehr, wie man sich leicht überzeugen kann, über jede noch so groß gegebene Grenze hinaus wachsen, wenn man n hinreichend groß annimmt. So ist z. B. die Summe des ersten und zweiten

Gliedes $= 1^1/_2$ und nach dem Vorhergehenden die Summe der beiden folgenden Glieder $> {}^1/_2$, also die Summe der 4 ersten Glieder > 2. Die Summe der 4 folgenden Glieder ist wieder nach den oben Erwiesenen $> {}^1/_2$, also die Summe der 8 ersten Glieder $> 2^1/_2$, folglich die Summe der $16 = 2^4$ ersten Glieder > 3. Auf diesem Wege fortfahrend erkennt man leicht, daß die Summe der 2^n ersten Glieder $> 1 + \frac{n}{2}$ ist und folglich für $n = \infty$ ebenfalls unendlich groß wird.

Anders verhält es sich jedoch mit der Reihe

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots\ldots,$$

deren Glieder abwechselnd positiv und negativ sind; denn gibt man dieser Reihe einmal die Form

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \ldots\ldots,$$

das anderemal

$$1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) - \ldots\ldots,$$

so sieht man auf der Stelle, daß die Summe ihrer n ersten Glieder, wie man auch immer n annehmen mag, jedenfalls größer als Null, aber kleiner als das erste Glied 1 ausfällt. Die Reihe ist folglich convergent*).

Ueberhaupt ist, wie leicht zu sehen, jede Reihe mit abwechselnd positiven und negativen Gliedern convergent, wenn ihre Glieder (von irgend einem Gliede an) fortwährend und bis zum Verschwinden abnehmen; und die Summe beliebig vieler Glieder, welche auf irgend ein Glied (z. B. das nte Glied) noch folgen, ist allemal kleiner als das nächstfolgende (also kleiner als das n + 1te) Glied.

§. 39. Zusatz.

Als unmittelbare Folgerung aus dem vorherg. §. ergeben sich weiter folgende Sätze:

1) Eine Reihe, in welcher alle Glieder positiv sind, ist gewiß convergent, wenn von irgend einem Gliede an ihre Glieder sämmtlich kleiner sind, als die gleich hohen Glieder einer convergenten Reihe, welche ebenfalls nur positive Glieder enthält.

2) Wenn eine Reihe, deren Glieder sämmtlich positiv sind, convergirt, so bleibt dieselbe auch dann noch convergent, wenn man in derselben beliebige Glieder gleich Null oder negativ setzt.

3) Eine Reihe mit positiven und negativen Gliedern ist daher gewiß convergent, wenn sie auch dann noch convergent bleibt, wenn man alle Glieder derselben als positiv annimmt. Im Folgenden wird nur von solchen convergenten Reihen die Rede sein, die auch dann noch convergent bleiben, wenn man alle Glieder als positiv annimmt.

4) Eine Reihe bleibt ferner convergent, wenn man alle Glieder mit der nämlichen Zahl multiplicirt oder dividirt.

---

*) Die Summe derselben ist $= \log nat\, 2 = 0{,}69315\ldots$ (S. unten §§. 58 u. 60).

§. 40. Lehrsatz.

Die unendliche geometrische Reihe

$$p + px + px^2 + px^3 + \ldots,$$

in welcher p eine unveränderliche, von x unabhängige Zahl vorstellt, ist convergent, wenn (absolut genommen) $x < 1$ ist, und es ist die Summe der Reihe

$$s = \frac{p}{1 - x}.$$

Dagegen divergirt die Reihe, wenn $x \geqq 1$ angenommen wird.

Bew. Bezeichnet man, wie gewöhnlich, die Summe der n ersten Glieder

$$p + px + px^2 \ldots + px^{n-1}$$

mit s_n, so ist bekanntlich *)

$$s_n = \frac{p(x^n - 1)}{x - 1} = \frac{p(1 - x^n)}{1 - x} = \frac{p}{1 - x} - \frac{px^n}{1 - x}.$$

Ist nun $x < 1$, so wird (nach §. 3) für in's Unendliche wachsende Werthe von n die Potenz x^n und also auch der Bruch

$$\frac{px^n}{1 - x}$$

unendlich klein, und es nähert sich folglich s_n der Grenze

$$\frac{p}{1 - x},$$

d. h. die Reihe convergirt und ihre Summe ist

$$s = \frac{p}{1 - x}.$$

Daß aber die Reihe divergirt, wenn $x \geqq 1$ gedacht wird, fällt leicht in die Augen.

Anm. Hiernach ist also z. B. wenn man $p = 1$ und $x = \frac{1}{2}$ annimmt

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2,$$

ferner wenn man $p = 2$ und $x = \frac{1}{3}$ setzt:

$$2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \frac{2}{81} + \ldots = \frac{2}{1 - \frac{1}{3}} = 3,$$

weiter wenn $p = 1$ und $x = -\frac{3}{4}$ ist:

$$1 - \frac{3}{4} + \frac{9}{16} - \frac{27}{64} + \frac{81}{256} - \ldots = \frac{1}{1 + \frac{3}{4}} = \frac{4}{7} \text{ u. dgl. m.}$$

§. 41. Zusatz.

Nimmt man in der Reihe des vorherg. §. $x = \frac{1}{2}$ an, so wird

$$s = \frac{p}{1 - \frac{1}{2}} = 2p.$$

In diesem Falle ist also das erste Glied p allein gerade so groß als die Summe aller übrigen. Hiernach ist klar, daß, wenn in einer unendlichen Reihe jedes Glied kleiner ist, als die Hälfte des vorhergehenden, das erste Glied allein größer ist, als die Summe aller übrigen, so wie auch einleuchtet, daß, wenn erst von irgend einem Gliede, etwa vom hten Gliede an, jedes folgende Glied kleiner wird, als die Hälfte des vorher-

*) Arithmetik und Algebra §. 248.

gehenden, dieses hte Glied allein größer ist, als die Summe aller folgenden.

Man kann sich dieses Satzes dann bedienen, wenn man die Summe einer convergenten Reihe durch Addiren ihrer ersten Glieder näherungsweise zu bestimmen sucht, um den Grad der Annäherung zu beurtheilen.

Anm. 1. So ist z. B. in der folgenden Reihe

$$1 + 2 \cdot \frac{2}{5} + 3 \cdot \frac{4}{25} + 4 \cdot \frac{8}{125} + 5 \cdot \frac{16}{625} + 6 \cdot \frac{32}{3125} + \ldots$$

das fünfte Glied gerade die Hälfte des vierten und jedes später folgende Glied kleiner als die Hälfte des nächst vorhergehenden. Wenn man daher die ersten fünf Glieder addirt, so muß ihre Summe

$$1 + 2 \cdot \frac{2}{5} + 3 \cdot \frac{4}{25} + 4 \cdot \frac{8}{125} = \frac{317}{125} = 2{,}536$$

von der Summe der Reihe um weniger als das letzte beibehaltene Glied $\frac{32}{125} = 0{,}256$ verschieden sein*).

Anm. 2. Wenn man in der Reihe des vorherg. §. nicht gerade $x = \frac{1}{2}$, sondern allgemeiner $x = \frac{1}{m}$ setzt, so erhält man

$$S = \frac{p}{1 - \frac{1}{m}} = \frac{mp}{m-1} = p + \frac{p}{m-1}.$$

Ist daher in einer Reihe von irgend einem Gliede, z. B. von dem hten Gliede an, jedes folgende kleiner als $\frac{1}{m}$ des vorhergehenden, so ist die Summe aller auf das hte folgenden Glieder kleiner als $\frac{1}{m-1}$ des hten Gliedes.

So ist z. B. in der folgenden Reihe

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots$$

die Summe der 11 ersten Glieder

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \ldots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 10} = 2{,}7182818 \ldots$$

von der Summe der Reihe selbst um weniger als

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{36288000}$$

verschieden, indem das 12te Glied $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 11}$ gerade der 11te Theil des 11ten Gliedes $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 10}$, jedes spätere Glied aber kleiner als $\frac{1}{11}$ des nächstvorhergehenden ist, und es ist daher der Näherungswerth

$$2{,}7182818$$

noch bis zur letzten Decimalstelle richtig.

---

*) Nach dem binomischen Lehrsatze ist die Summe der obigen Reihe

$$= \left(1 - \frac{2}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \frac{25}{9} = 2{,}777 \ldots$$

und folglich der durch Addition der 5 ersten Glieder gefundene Näherungswerth um 0,241 . . . zu klein.

§. 42. Lehrsatz.

Wenn in der unendlichen Reihe

$$1)\quad U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + \ldots$$

der Quotient zweier auf einander folgenden Glieder

$$\frac{U_{n+1}}{U_n}$$

für in's Unendliche wachsende Werthe von n sich einer bestimmten Grenze q nähert, so ist die Reihe convergent, wenn (absolut genommen) $q < 1$ ist; dagegen divergent, wenn $q > 1$ ist.

Bew. Es sei zunächst $q < 1$, und es bezeichne w irgend eine zwischen q und 1 liegende Zahl. Da der Quotient zweier auf einander folgenden Glieder zuletzt sich der Grenze q unendlich nähern soll, so muß derselbe offenbar von irgend einem Gliede an fortwährend kleiner als w bleiben. Angenommen dieses Glied sei das hte Glied der Reihe, so wird für $n \geqq h$ fortwährend

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} < w$$

sein müssen. Man setze nun

$$\frac{U_h}{w^h} = k$$

und bilde folgende geometrische unendliche Reihe

$$2)\quad kw + kw^2 \ldots + kw^h + kw^{h+1} + kw^{h+2} \ldots$$

Vergleicht man diese Reihe mit der Reihe (1), so findet man, daß in der Reihe (1) alle auf das hte folgenden Glieder kleiner sind, als in der Reihe (2). Denn es ist zunächst nach der Annahme

$$\frac{U_h}{w^h} = k, \text{ folglich } U_h = kw^h,$$

ferner

$$\frac{U_{h+1}}{U_h} < w, \text{ folglich } U_{h+1} < U_h w \text{ oder } < kw^{h+1},$$

$$\frac{U_{h+2}}{U_{h+1}} < w, \text{ folglich } U_{h+2} < U_{h+1} w < kw^{h+2},$$

$$\frac{U_{h+3}}{U_{h+2}} < w, \text{ folglich } U_{h+3} < U_{h+2} w < kw^{h+3},$$

u. s. w.

Da nun $w < 1$ angenommen und folglich nach §. 40 die Reihe (2) convergent ist, so muß nach §. 39, 1. auch die Reihe (1) convergiren.

Daß aber die Reihe (1) divergiren muß, wenn $q > 1$ ist, fällt bei einfacher Umkehrung der vorstehenden Schlußfolge unmittelbar in die Augen.

Anm. 1. So ist z. B. in der Reihe

$$\frac{1}{1} + \frac{3}{2} + \frac{5}{4} + \frac{7}{8} + \frac{9}{16} \ldots + \frac{2n-1}{2^{n-1}} + \frac{2n+1}{2^n} + \ldots$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2n+1}{2n-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}};$$

folglich für in's Unendliche wachsende Werthe von n

$$q = \frac{1}{2}$$

und daher die Reihe convergent*).

In der Reihe

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots$$

ist der Quotient

$$\frac{U^{n+1}}{U^n} = \frac{x^n}{1.2\ldots n} : \frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} = \frac{x}{n},$$

folglich für $n = \infty$ $\quad q = \frac{x}{\infty} = 0,$

die Reihe ist daher convergent, was auch immer x bezeichnen mag.

Es sei ferner noch gegeben die Reihe

$$1 + 3x + 7x^2 + 15x^3 \ldots + (2^n - 1)x^{n-1} + (2^{n+1} - 1)x^n + \ldots;$$

hier ist

$$\frac{U^{n+1}}{U_n} = \frac{2^{n+1} - 1}{2^n - 1} . x = \frac{2 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2^n}} . x$$

also für $n = \infty$ $\quad q = 2x.$

Die Reihe ist daher convergent, so lange absolut genommen $x < \frac{1}{2}$ ist**).

Wäre endlich die Reihe

$$1 + 1.x + 1.2.x^2 + 1.2.3.x^3 + 1.2.3.4.x^4 + \ldots$$

gegeben, so würde

$$\frac{U^{n+1}}{U_n} = \frac{1.2\ldots n.x^n}{1.2\ldots(n-1).x^{n-1}} = nx$$

folglich für $n = \infty$ $\quad q = \infty . x;$

die Reihe kann daher niemals convergiren, was auch immer x bezeichnen mag, den einzigen Fall ausgenommen, daß $x = 0$ ist, wo sich dann die Reihe auf ihr erstes Glied reducirt.

Anm. 2. Der vorherg. §. läßt es unentschieden, ob die Reihe convergire oder divergire, wenn $q = 1$ ist. Die Beurtheilung der hierher gehörigen Fälle ist jedoch mehrentheils mit größerer Schwierigkeit verbunden und konnte in der vorliegenden Schrift um so eher übergangen werden, als dergleichen Reihen, wenn sie convergent sind, doch jedenfalls nur sehr langsam convergiren und daher zu wirklichen Berechnungen fast ganz unbrauchbar sind. Ein leichter zu erledigender Fall ist oben in der Anm. zu §. 38 behandelt.

---

*) Die obige Reihe wird erhalten, wenn man den Bruch

$$\frac{1 + x}{(1 - x)^2}$$

in eine unendliche Reihe entwickelt und dann $x = \frac{1}{2}$ setzt; ihre Summe ist folglich $= 6$.

**) Die Summe dieser Reihe ist

$$\frac{1}{1 - 3x + 2x^2}.$$

B. Von den Reihen, welche nach ganzen Potenzen einer Veränderlicheu fortschreiten, im allgemeinen.

§. 43. Erklärung.

Eine unendliche Reihe von der Form

$$A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \ldots,$$

in welcher die Ausdrücke $A_0, A_1, A_2 \ldots$ kein x enthalten, heißt eine unendliche nach ganzen Potenzen der Veränderlichen x fortschreitende Reihe.

Man sieht leicht, daß die ganze Function ein besonderer Fall dieser unendlichen Reihe ist, der entsteht, wenn von irgend einem Coefficienten an alle folgenden = 0 sind.

Man addirt, subtrahirt und multiplicirt diese unendlichen Reihen auf dieselbe Art, wie die ganzen Functionen, nur daß hier die Beschränkungen wegfallen, welche früher daraus entstanden, daß der Exponent n der höchsten Potenz von x über eine gewisse Zahl nicht hinausging. (Vergl. §. 11—13.)

§. 44. Lehrsatz.

So wie eine ganze Funktion vom mten Grade für m von einander verschiedene Werthe von x verschwinden kann, so kann auch eine unendliche Reihe für unendlich viele verschiedene Werthe von x verschwinden; dagegen ist es aber doch nicht möglich, daß eine unendliche Reihe

$$A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \ldots,$$

welche zwischen irgend zwei Grenzen

$$x = +\alpha \text{ und } x = -\alpha$$

als convergent gedacht werden soll, für jeden beliebigen, innerhalb dieser Grenzen liegenden Werth von x verschwinde; — es würden dann die Coefficienten $A_0, A_1, A_2, A_3 \ldots$ insgesammt = 0 sein müssen.

Bew. Angenommen es sei für jeden zwischen den angeführten Grenzen liegenden Werth von x

$$1)\quad 0 = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \ldots,$$

so ergibt sich zunächst, wenn man $x = 0$ setzt,

$$2)\quad 0 = A_0$$

und folglich auch für jeden Werth von x zwischen $+\alpha$ und $-\alpha$

$$3)\quad 0 = A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \ldots,$$

also auch — wenn x zwischen jenen Grenzen liegend und von Null verschieden gedacht wird, — wenn man in der Gleichung (3) beiderseits mit x dividirt,

$$0 = A_1 + A_2x + A_3x^2 + A_4x^3 + \ldots$$

oder $\quad 4)\quad 0 = A_1 + x(A_2 + A_3x + A_4x^2 + \ldots).$

Da in dem Producte $\quad x(A_2 + A_3x + A_4x^2 + \ldots)$

der eingeschlossene Factor nach der Voraussetzung (und §. 39, 4) eine convergente Reihe bildet, folglich die Summe dieser Reihe einer unendlichen Zahl gleich ist und daher das Product selbst für unendlich kleine Werthe von x offenbar ebenfalls unendlich klein wird, während A_1 seinen Werth jederzeit ungeändert beibehält, so kann die Gleichung (4) nur dann richtig sein, wenn

$$5)\quad A_1 = 0$$

und also auch für alle zwischen $+\alpha$ und $-\alpha$ liegenden Werthe von x

$$6)\quad 0 = A_2x + A_3x^2 + A_4x^3 + \ldots$$

ist. Dividirt man wiederum beiderseits mit x, so erhält man für jeden Werth von x, der nicht $= 0$ ist und zwischen den Grenzen $+ \alpha$ und $- \alpha$ liegt,

$$7) \quad 0 = A_2 x + A_3 x + A_4 x^2 + \ldots$$

Aus dieser Gleichung leitet man eben so wie im Vorhergehenden zunächst ab

$$8) \quad A_2 = 0$$

und dann weiter $A_3 = 0$, $A_4 = 0$ u. s. w.*)

§. 45. Lehrsatz.

Wenn zwei unendliche Reihen

$$F(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots$$

und

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$$

zwischen den nämlichen Grenzen convergiren und für alle zwischen diesen Grenzen liegenden Werthe von x einerlei Summe geben, so sind in beiden die Coefficienten gleich hoher Potenzen von x dieselben und die Reihen folglich identisch.

Bew. Da man nach der Voraussetzung

$$0 = F(x) - f(x) = (A_0 - a_0) + (A_1 - a_1)x + (A_2 - a_2)x^2 + \ldots$$

setzen kann, so muß zufolge des vorhergehenden §.

$$A_0 = a_0, \; A_1 = a_1, \; A_2 = a_2 \text{ u. s. w.}$$

sein.

§. 46. Lehrsatz.

Wenn eine unendliche Reihe

$$f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots$$

zwischen irgend zwei Grenzen

$$x = + \alpha \text{ und } x = - \alpha$$

convergirt, so ist sie auch für alle zwischen diesen Grenzen liegenden Werthe der Veränderlichen x eine stetige Function von x.

Bew. Um zu zeigen, daß die Aenderung, welche f(x) erleidet, so klein ausfallen kann, als man immer will, wenn die Aenderung des Werthes von x hinreichend klein wird, denke man sich f(x) in zwei Theile zerlegt, von denen der eine, die Summe der $n + 1$ ersten Glieder,

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 \ldots + A_n x^n$$

durch S_n und der andere, die Summe aller übrigen Glieder, mit R_n bezeichnet sein mag. Dann wird man setzen können

$$f(x) = S_n + R_n.$$

Nach §. 38 läßt sich n groß genug annehmen, daß R_n beliebig klein wird, was auch immer x bezeichnen mag, so lange nur überhaupt x zwischen den oben angeführten Grenzen $+ \alpha$ und $- \alpha$ liegt; dasselbe wird daher auch jedenfalls von der Aenderung gelten müssen, welche R_n erleidet, wenn x seinen Werth ändert. —

Wie groß man sich aber auch immer n denken mag, so ist doch S_n eine ganze Function von x und muß daher nach §. 22 mit x seinen Werth stetig ändern, d. h. man wird die Aenderung von x so klein annehmen können, daß die Aenderung, welche S_n erleidet, beliebig klein ausfällt.

---

*) Nicht selten wird der obige Satz oder, was im wesentlichen dasselbe sagen will, der folgende Satz, kürzer bewiesen, indem man die Gleichung (5) aus der Gleichung (4) dadurch ableitet, daß man $x = 0$ setzt, — wobei man jedoch ganz zu übersehen scheint, daß die Gleichung (4) nur unter der Voraussetzung aus (3) erhalten werden konnte, daß x von Null verschieden ist.

Die Aenderung des Werthes von f(x) ist die Summe der Aenderungen der Werthe von S_n und R_n, und da diese Aenderungen, wenn man x um ein hinreichend Kleines sich ändern läßt, so klein werden können, als man immer will, so muß dasselbe auch von der Aenderung des Werthes f(x) gelten. Demnach ist die durch f(x) vorgestellte Reihe, so lange sie convergirt, eine stetige Function von x*).

C. Von den recurrenten Reihen.

§. 47. Erklärung.

Einen geschlossenen Ausdruck, welcher eine Function einer Veränderlichen x ist, in eine unendliche nach ganzen Potenzen dieser Veränderlichen fortschreitende Reihe entwickeln, heißt eine solche Reihe angeben, deren Summe für alle Werthe von x, welche innerhalb der Grenzen liegen, zwischen denen die Reihe convergirt, der gegebenen Function gleich wird.

Aus §. 45 folgt, daß sich jeder geschlossene Ausdruck nur auf einerlei Art in eine nach ganzen Potenzen der Veränderlichen x fortschreitende Reihe entwickeln läßt.

§. 48. Aufgabe.

Den Bruch
$$\frac{5 - 2x}{1 - 3x + 2x^2}$$
in eine unendliche nach ganzen Potenzen von x fortschreitende Reihe zu entwickeln.

Aufl. Man nehme an, die dem gegebenen Bruche gleiche Reihe sei
$$A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \ldots$$
Multiplicirt man dieselbe mit dem Nenner
$$1 - 3x + 2x^2,$$
so erhält man zum Product
$$A_0 + \left.\begin{matrix} A_1 \\ -3A_0 \\ \end{matrix}\right\} x + \left.\begin{matrix} A_2 \\ -3A_1 \\ +2A_0 \end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix} A_3 \\ -3A_2 \\ +2A_1 \end{matrix}\right\} x^3 + \left.\begin{matrix} A_4 \\ -3A_3 \\ +2A_2 \end{matrix}\right\} x^4 + \ldots$$
Da nun diese Reihe dem Zähler des gegebenen Bruchs, 5 — 2x, der sich auch so schreiben läßt:
$$5 - 2x + 0 . x^2 + 0 . x^3 + 0 . x^4 + \ldots,$$
für jeden Werth von x gleich sein soll, so ergeben sich hieraus vermöge §. 45 zur Bestimmung der gesuchten Coefficienten die Gleichungen:
$$\begin{aligned} A_0 &= 5 \\ A_1 - 3A_0 &= -2, \text{ also } A_1 = 3A_0 - 2 = 13 \\ A_2 - 3A_1 + 2A_0 &= 0, \quad \text{„} \quad A_2 = 3A_1 - 2A_0 = 29 \\ A_3 - 3A_2 + 2A_1 &= 0, \quad \text{„} \quad A_3 = 3A_2 - 2A_1 = 61 \\ A_4 - 3A_3 + 2A_2 &= 0, \quad \text{„} \quad A_4 = 3A_3 - 2A_2 = 125 \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$
Demnach wird man setzen können
$$\frac{5 - 2x}{1 - 3x + 2x^2} = 5 + 13x + 29x^2 + 61x^3 + 125x^4 + \ldots$$

*) In dem vorstehenden Beweise ist absichtlich, um jedem Mißverständnisse möglichst vorzubeugen, auf die Abkürzung verzichtet, welche die Ausdrücke: unendlich klein und unendlich groß gewähren.

§. 49. Zusatz.

1) Durch die vorhergehende Entwicklung ist zugleich die Frage beantwortet, ob es überhaupt möglich ist, den im vorherg. §. gegebenen Bruch in eine unendliche Reihe zu entwickeln, da man wirklich eine Reihe gefunden hat, welche mit dem Nenner des Bruchs multiplicirt den Zähler zum Product gibt.

2) Es ist aber leicht zu sehen, daß **sich das nämliche Verfahren auf jeden beliebigen Bruch anwenden läßt, dessen Zähler und Nenner ganze Functionen derselben Veränderlichen x sind.** — Zur Erläuterung des eben Gesagten mögen folgende zwei Beispiele dienen:

1. 1) Es sei gegeben der Bruch

$$\frac{a + bx + cx^2}{\alpha + \beta x}.$$

Man setze

$$\frac{a + bx + cx^2}{\alpha + \beta x} = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + \ldots,$$

also wenn man beiderseits mit $\alpha + \beta x$ multiplicirt:

$$a + bx + cx^2 = \begin{array}{l}\alpha A_0\\ \end{array} \begin{array}{l} + \alpha A_1 \\ + \beta A_0 \end{array}\Big\} x \begin{array}{l} + \alpha A_2 \\ + \beta A_1 \end{array}\Big\} x^2 \begin{array}{l} + \alpha A_3 \\ + \beta A_2 \end{array}\Big\} x^3 \begin{array}{l} + \alpha A_4 \\ + \beta A_3 \end{array}\Big\} x^4 \begin{array}{l} + \ldots \\ + \ldots \end{array}$$

Aus dieser Gleichung ergeben sich nach §. 45 zur Bestimmung der gesuchten Coefficienten die Gleichungen:

$$\begin{array}{rlrl} \alpha A_0 &= a, & \text{also } A_0 &= a : \alpha \\ \alpha A_1 + \beta A_0 &= b, & \text{„} \quad A_1 &= (b - \beta A_0) : \alpha \\ \alpha A_2 + \beta A_1 &= c, & \text{„} \quad A_2 &= (c - \beta A_1) : \alpha \\ \alpha A_3 + \beta A_2 &= 0, & \text{„} \quad A_3 &= -\beta A_2 : \alpha \\ \alpha A_4 + \beta A_3 &= 0, & \text{„} \quad A_4 &= -\beta A_3 : \alpha \quad \text{u. s. w.} \end{array}$$

2. 2) Es sei ferner gegeben der Bruch

$$\frac{a}{\alpha + \beta x + \gamma x^2}.$$

Setzt man

$$\frac{a}{\alpha + \beta x + \gamma x^2} = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + \ldots$$

und folglich

$$a = \alpha A_0 \begin{array}{l} + \alpha A_1 \\ + \beta A_0 \\ \; \end{array}\left\}\begin{array}{l} x \\ \\ \; \end{array}\right. \begin{array}{l} + \alpha A_2 \\ + \beta A_1 \\ + \gamma A_0 \end{array}\Bigg\} x^2 \begin{array}{l} + \alpha A_3 \\ + \beta A_2 \\ + \gamma A_1 \end{array}\Bigg\} x^3 \begin{array}{l} + \alpha A_4 \\ + \beta A_3 \\ + \gamma A_2 \end{array}\Bigg\} x_4 \begin{array}{l} + \ldots \\ + \ldots \\ + \ldots \end{array}$$

so erhält man nach §. 45 zur Bestimmung der gesuchten Coefficienten folgende Gleichungen:

$$\begin{array}{rlrl} \alpha A_0 &= a, & \text{also } A_0 &= a : \alpha. \\ \alpha A_1 + \beta A_0 &= 0, & \text{„} \quad A_1 &= -\beta A_0 : \alpha \\ \alpha A_2 + \beta A_1 + \gamma A_0 &= 0, & \text{„} \quad A_2 &= (-\beta A_1 - \gamma A_0) : \alpha \\ \alpha A_3 + \beta A_2 + \gamma A_1 &= 0, & \text{„} \quad A_3 &= (-\beta A_2 - \gamma A_1) : \alpha \\ \alpha A_4 + \beta A_3 + \gamma A_2 &= 0, & \text{„} \quad A_4 &= (-\beta A_3 - \gamma A_2) : \alpha \end{array}$$

u. s. w.

3) Wenn in den beiden vorhergehenden Beispielen $\alpha = 0$ angenommen wird, so verwandelt sich die erste der Gleichungen für die Bestimmung der Coefficienten in die folgende:

$$0 \,.\, A_0 = a,$$

welcher, so lange a von Null verschieden gedacht wird, gar kein Werth von A_0 Genüge leisten kann. Wenn daher in dem gegebenen Bruche der erste Coefficient des Nenners $\alpha = 0$, aber der erste Coefficient des Zählers a von Null verschieden ist, so ist es nicht möglich, den Bruch in eine unendliche nach ganzen Potenzen von x fortschreitende Reihe zu entwickeln. — Sind a und α beide $= 0$, wie in dem folgenden Bruche

$$\frac{bx + cx^2}{\beta x + \gamma x^2 + \delta x^3},$$

so kann man zunächst Zähler und Nenner mit x aufheben und dann die Entwicklung des erhaltenen Bruchs

$$\frac{b + cx}{\beta + \gamma x + \delta x^2}$$

versuchen.

4) Das Verfahren, welches man bisher zur Division zweier ganzen Functionen angewendet hat, kann eben so auch dazu dienen, den Quotienten zweier unendlichen Reihen in eine unendliche Reihe zu entwickeln.

5) Mag nun die unendliche Reihe durch Division zweier ganzen Functionen oder zweier unendlichen Reihen entstanden sein, so bedarf es doch jedesmal noch der besondern Untersuchung, zwischen welchen Grenzen die erhaltene Reihe convergirt, und es läßt sich keineswegs allgemein behaupten, daß, wenn zwei Reihen zwischen denselben Grenzen convergiren, dasselbe auch von der für ihren Quotienten zu setzenden Reihe gelten müsse. — So geben in dem Beispiele des vorherg. §.

$$\frac{5 - 2x}{1 - 3x + 2x^2} = 5 + 13x + 29x^2 + 61x^3 + 125x^4 + \ldots$$

Zähler und Nenner des gegebenen Bruchs, da sie ganze Functionen sind, für jeden Werth von x endliche Summen; die dem Bruche gleiche unendliche Reihe convergirt aber keineswegs für jeden Werth von x. Um nach §. 42 Grenzen für die Convergenz der Reihe zu erhalten, kann die Bemerkung dienen, welche sich leicht allgemein erweisen läßt, daß jeder Coefficient gleich ist dem doppelten des vorhergehenden vermehrt um die Zahl 3, also allgemein

$$A_n = 2A_{n-1} + 3.$$

Demnach ist der Quotient aus dem n + 1ten und dem nten Gliede

$$\frac{A_n x^n}{A_{n-1} x^{n-1}} = \frac{2A_{n-1} + 3}{A_{n-1}} \cdot x = \left(2 + \frac{3}{A_{n-1}}\right)x,$$

und da für $n = \infty$ offenbar auch $A_{n-1} = \infty$ wird, so ist die Grenze, welcher sich jener Quotient zuletzt nähert,

$$q = 2x.$$

Die Reihe ist folglich nur so lange convergent, als absolut genommen $2x < 1$, d. h. $x < \frac{1}{2}$ ist.

Anm. Zur Uebung können folgende Beispiele dienen:

1) $\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots$

2) $\frac{3 - 5x}{2 + 3x} = \frac{3}{2} - \frac{19}{4}x + \frac{57}{8}x^2 - \frac{171}{16}x^3 + \frac{513}{32}x^4 - \ldots$

3) $\frac{1+2x}{1-x-x^2} = 1 + 3x + 4x^2 + 7x^3 + 11x^4 + 18x^5 + 29x^0 + \ldots$

4) $\frac{1-x}{1-x-2x^2} = 1 + 2x^2 + 2x^3 + 6x^4 + 10x^5 + 22x^6 + 42x^7 + \ldots$

5) $\frac{1}{1-2x+x^2} = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + 6x^6 + \ldots$

6) $\frac{1}{1-2x^2-4x^2+x^4-3x^5} = 1 + 2x + 8x^2 + 24x^3 + 79x^4 + 255x^5 + $
$+ 824x^6 + \ldots$

§. 50. Erklärung.

In den beiden vorherg. §§. hat man unendliche Reihen kennen gelernt, welche die Eigenthümlichkeit haben, daß von irgend einem Coefficienten an jeder folgende auf ganz gleiche Weise von den nächstvorhergehenden abhängt, und daß diese Abhängigkeit durch eine Gleichung vom ersten Grade zwischen den auf einander folgenden Coefficienten ausgedrückt wird. Reihen, welche diese Eigenschaft besitzen, nennt man recurrente oder zurücklaufende, und die Zahlen, mit denen die Coefficienten in der Gleichung, welche ihre gegenseitige Abhängigkeit ausdrückt, multiplicirt sind, bilden die sogenannte Relationsscale.

Anm. So wie wir im Vorhergehenden gesehen haben, daß sich im allgemeinen der Quotient zweier ganzen Functionen in eine recurrente Reihe entwickeln läßt, so kann auch umgekehrt gezeigt werden, daß jede recurrente Reihe dem Quotienten zweier ganzen Functionen gleich ist. Wir gehen jedoch auf die Beantwortung der Frage, wie dieser Quotient, wenn die recurrente Reihe und die Relationsscale gegeben ist, gefunden wird, nicht näher ein, da wir im Folgenden hiervon keinen Gebrauch machen werden. Ueberhaupt haben wir von den recurrenten Reihen hier nur zu dem Zwecke gehandelt, um einerseits den Leser in möglichst einfacher Weise mit dem Operiren mit unendlichen Reihen und der Methode der unbestimmten Coefficienten vertraut zu machen, und um andererseits eine Lücke der niederen Arithmetik zu ergänzen, in welcher die Division algebraischer Summen unerledigt bleiben mußte, weil diese in der Regel auf die Entwicklung einer unendlichen Reihe hinführt.

D. Der binomische Lehrsatz für gebrochene und negative Exponenten.

§. 51. Erklärung.

Bezeichnet m eine absolute ganze Zahl, so ist zufolge des binomischen Satzes (Arithm. §. 271) bekanntlich

$$(1+x)^m = 1 + m_1 x + m_2 x^2 + m_3 x^3 \ldots + x^m,$$

wo man der Kürze wegen

$$m = m_1,\ \frac{m(m-1)}{1\,.\,2} = m_2,\ \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3} = m_3 \text{ u. s. w.}$$

gesetzt hat. Die rechte Seite dieser Gleichung ist eine ganze Function vom mten Grade und schließt mit dem Gliede x^m ab. Wollte man sich aber erlauben, statt m eine gebrochene oder eine negative Zahl zu setzen und übrigens das Gesetz beibehalten, welchem die Binomialcoefficienten folgen, so würde die rechte Seite jener Gleichung gar nicht mehr abbrechen, sondern sich in eine ohne Ende fortlaufende Reihe

$$1 + m_1x + m_2x^2 + m_3x^3 + \ldots$$

verwandeln. Diese unendliche Reihe, von welcher im Folgenden gezeigt wird, daß sie, so lange sie convergirt, ebenfalls der Potenz $(1 + x)^m$ gleich ist, soll vorläufig der Kürze wegen mit

$$\varphi(m)$$

bezeichnet werden.

Anm. Hiernach ist also z. B.

1) $$\varphi\left(\frac{2}{3}\right) = 1 + \left(\frac{2}{3}\right)_1 x + \left(\frac{2}{3}\right)_2 x^2 + \left(\frac{2}{3}\right)_3 x^3 + \ldots$$

$$= 1 + \frac{2}{3}x + \frac{\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3} - 1\right)}{1\,.\,2}x^2 + \frac{\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3} - 1\right)\left(\frac{2}{3} - 2\right)}{1\,.\,2\,.\,3}x^3 + \ldots$$

$$= 1 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{4}{81}x^3 - \ldots$$

2) $$\varphi(-2) = 1 + (-2)_1x + (-2)_2x^2 + (-2)_3x^3 + \ldots$$

$$= 1 - 2x + \frac{(-2).(-3)}{1\,.\,2}x^2 + \frac{(-2).(-3).(-4)}{1\,.\,2\,.\,3}x^3 + \ldots$$

$$= 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \ldots$$

3) $$\varphi(m + n) = 1 + (m + n)_1x + (m + n)_2x^2 + (m + n)_3x^3 + \ldots$$

$$= 1 + (m + n)x + \frac{(m + n)(m + n - 1)}{1\,.\,2}x^2$$

$$+ \frac{(m + n)(m + n - 1)(m + n - 2)}{1\,.\,2\,.\,3}x^3 + \ldots$$

Bemerk. Für den Beweis der Allgemeingültigkeit des binomischen Lehrsatzes sind die folgenden, in §. 10 des 2. Abschnitts erwiesenen Gleichungen unentbehrlich:

$$(\odot)\left\{\begin{aligned}(m + n)_1 &= m_1 + n_1\\ (m + n)_2 &= m_2 + m_1n_1 + n_2\\ (m + n)_3 &= m_3 + m_2n_1 + m_1n_2 + n_3\\ (m + n)_4 &= m_4 + m_3n_1 + m_2n_2 + m_1n_3 + n_4\end{aligned}\right.$$

u. s. w.

Um aber das Folgende auch solchen Lesern, welche den ersten Abschnitt des 2. Kapitels überschlagen haben, zugänglich zu machen, schalten wir hier noch einen andern Beweis für jene Gleichungen ein.

Sind m und n ganze Zahlen, so ist nach dem binomischen Satze

$$(1 + x)^m = 1 + m_1x + m_2x^2 + m_3x^3 + m_4x^4 \ldots + x^m$$

und

$$(1 + x)^n = 1 + n_1x + n_2x^2 + n_3x^3 + n_4x^4 \ldots + x^n.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen nach Anleitung des §. 11 in einander, so erhält man

1) $$(1 + x)^{m+n} = 1 + \left.\begin{matrix} m_1 \\ + n_1 \end{matrix}\right\} x + \left.\begin{matrix} m_2 \\ + m_1n_1 \\ + n_2 \end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix} m_3 \\ + m_2n_1 \\ + m_1n_2 \\ + n_3 \end{matrix}\right\} x^3 + \left.\begin{matrix} m_4 \\ + m_3n_1 \\ + m_2n_2 \\ + m_1n_3 \\ + n_4 \end{matrix}\right\} x^4 \ldots + x^{m+n}$$

Nach dem binomischen Satze ist aber auch

$$2)\ (1+x)^{m+n} =$$
$$= 1 + (m+n)_1 x + (m+n)_2 x^2 + (m+n)_3 x^3 + (m+n)_4 x^4 \ldots + x^{m+n}.$$

In den Gleichungen (1) und (2) sind die rechten Seiten ganze Functionen von x, und da diese Gleichungen für jeden Werth von x richtig sind, so müssen nach §. 19 die Coefficienten der einen nach der Reihe den Coefficienten der andern gleich sein, also

$$\begin{aligned}
(m+n)_1 &= m_1 + n_1 \\
(m+n)_2 &= m_2 + m_1 n_1 + n_2 \\
(m+n)_3 &= m_3 + m_2 n_1 + m_1 n_2 + n_3 \\
(m+n)_4 &= m_4 + m_3 n_1 + m_2 n_2 + m_1 n_3 + n_4
\end{aligned}$$

u. s. w.

Demnach sind die Gleichungen (⊙) für alle möglichen Werthe von m und n, welche absolute ganze Zahlen sind, als richtig erwiesen, und es erübrigt nun noch die Richtigkeit dieser Gleichungen auch für den Fall darzuthun, daß m oder n oder beide gebrochene Zahlen oder negative ganze oder gebrochene Zahlen bedeuten. Wir wollen diesen Beweis zunächst für eine einzelne z. B. für die dritte der obigen Gleichungen führen.

Setzen wir in derselben statt der abgekürzten Zeichen die durch diese vorgestellten Ausdrücke selbst, so verwandelt sich jene Gleichung in

$$\frac{(m+n)(m+n-1)(m+n-2)}{1\,.\,2\,.\,3} = \left\{\begin{array}{l} \dfrac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3} + \dfrac{m(m-1)}{1\,.\,2}\,.\,\dfrac{n}{1} \\ + \dfrac{m}{1}\,.\,\dfrac{n(n-1)}{1\,.\,2} + \dfrac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3} \end{array}\right.$$

oder nach Wegschaffung der Brüche

$$(m+n)(m+n-1)(m+n-2) = \left\{\begin{array}{l} m(m-1)(m-2) + 3m(m-1)\,.\,n \\ + 3m\,.\,n(n-1) + n(n-1)(n-2). \end{array}\right.$$

Wenn man in dieser Gleichung die zusammengesetzten Producte entwickelt und dann nach den Potenzen von m ordnet, so verwandelt sich offenbar (vergl. §. 8, 2. und §. 9) eine jede Seite der Gleichung in eine ganze Function der Zahl m vom dritten Grade. Denkt man sich nun zunächst statt n irgend eine absolute ganze Zahl gesetzt, so müssen die beiden Functionen der Zahl m, — da sie für jeden Werth von m, welcher eine absolute ganze Zahl ist, oben als gleich erwiesen sind, — vermöge §. 19 identisch und also überhaupt für jeden Werth von m einander gleich sein. Demnach ist die zu erweisende Gleichung richtig, wenn nur n eine absolute ganze Zahl bezeichnet; m kann ganz oder gebrochen, positiv oder negativ sein. — Die beiden Seiten jener Gleichung können aber auch als ganze Functionen der Zahl n ebenfalls vom dritten Grade angesehen werden; und da sie für alle Werthe von n, welche absolute ganze Zahlen sind, einander gleich werden, so müssen sie ebenfalls nach §. 19 auch in Beziehung auf n identisch und also richtig sein, was auch immer n bezeichnen mag. Demnach gilt die obige Gleichung ganz allgemein — für alle möglichen ganzen oder gebrochenen, positiven oder negativen Werthe von m und n.

Was aber hier um größerer Anschaulichkeit willen für eine besondere der Gleichungen (⊙) erwiesen ist, kann offenbar eben so für jede andere dargethan werden.

§. 52. Zusatz.

1) Wenn man die unendlichen Reihen

$$\varphi(m) = 1 + m_1x + m_2x^2 + m^3x^3 + m_4x^4 + \ldots$$

und

$$\varphi(n) = 1 + n_1x + n_2x^2 + n_3x^3 + n_4x^4 + \ldots$$

in einander multiplicirt, so erhält man zum Product

$$\varphi(m) \,.\, \varphi(n) = 1 + \left.\begin{matrix} m_1 \\ + n_1 \end{matrix}\right\} x + \left.\begin{matrix} m_2 \\ + m_1n_1 \\ + n_2 \end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix} m_3 \\ + m_2n_1 \\ + m_1n_2 \\ + n_3 \end{matrix}\right\} x^3 + \left.\begin{matrix} m_4 \\ + m_3n_1 \\ + m_2n_2 \\ + m_1n_3 \\ + n_4 \end{matrix}\right\} x^4 + \ldots$$

Zufolge der voranstehenden Bemerkung kann man die rechte Seite dieser Gleichung ersetzen durch die unendliche Reihe

$$1 + (m+n)_1x + (m+n)_2x^2 + (m+n)_3x^3 + (m+n)_4x^4 + \ldots,$$

und hierfür kann man nach der abkürzenden Bezeichnungsweise

$$\varphi(m+n)$$

setzen. Demnach ist also allemal, was auch immer m und n bezeichnen mögen,

$$1) \quad \varphi(m) \,.\, \varphi(n) = \varphi(m+n).$$

2) Setzt man in dieser Gleichung m = n, so verwandelt sich dieselbe in

$$\varphi(m) \,.\, \varphi(m) = \varphi(m+m)$$

oder

$$[\varphi(m)]^2 = \varphi(2m).$$

Multiplicirt man aufs neue mit $\varphi(m)$, so erhält man

$$[\varphi(m)]^3 = \varphi(m) \,.\, \varphi(2m)$$

oder vermöge Gleichung (1), wenn man n = 2m annimmt,

$$[\varphi(m)]^3 = \varphi(m + 2m) = \varphi(3m).$$

Eben so findet man, wenn man abermals mit $\varphi(m)$ multiplicirt,

$$[\varphi(m)]^4 = \varphi(4m),$$

und auf diesem Wege fortfahrend überhaupt, wenn α irgend eine absolute ganze Zahl bedeutet,

$$2) \quad [\varphi(m)]^\alpha = \varphi(\alpha m).$$

Anm. Die Gleichungen (1) und (2) mögen folgende Beispiele veranschaulichen: vermöge der Gleichung (1) ist z. B.

$$\varphi\left(\frac{7}{3}\right) \cdot \varphi\left(-\frac{3}{2}\right) = \varphi\left(\frac{7}{3} - \frac{3}{2}\right) = \varphi\left(\frac{5}{6}\right),$$

das heißt: es ist

$$\left[1 + \frac{7}{3}x + \frac{\frac{7}{3}\left(\frac{7}{3}-1\right)}{1\,.\,2}x^2 + \ldots\right] \cdot \left[1 + \left(-\frac{3}{2}\right)x + \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}-1\right)x^2}{1\,.\,2} + \ldots\right]$$

$$= 1 + \frac{5}{6}x + \frac{\frac{5}{6}\left(\frac{5}{6}-1\right)}{1\,.\,2}x^2 + \ldots$$

und vermöge der Gleichung (2) ist z. B.

$$\left[\varphi\left(\frac{5}{8}\right)\right]^{12} = \varphi\left(12 \,.\, \frac{5}{8}\right) = \varphi\left(\frac{15}{2}\right),$$

das heißt: es ist

$$\left(1 + \frac{5}{8}x + \frac{\frac{5}{8} \cdot \left(\frac{5}{8}-1\right)}{1\,.\,2}x^2 + \ldots\right)^{12} = 1 + \frac{15}{2}x + \frac{\frac{15}{2}\left(\frac{15}{2}-1\right)}{1\,.\,2}x^2 + \ldots$$

§. 53. Lehrsatz.

So lange die Reihe

$$\odot)\quad \varphi(m) = 1 + m_1 x + m_2 x^2 + m_3 x^3 + \ldots$$

convergirt, ist ihre Summe

$$= (1 + x)^m,$$

es mag nun m eine ganze oder eine gebrochene, eine positive oder eine negative Zahl oder Null bezeichnen*).

Bew. 1) Wenn m eine ganze Zahl ist, so schließt die Reihe mit der mten Potenz von x, und bekanntlich ist dann

$$(1 + x)^m = 1 + m_1 x + m_2 x^2 + m_3 x^3 \ldots + x^m.$$

2) Es sei ferner m eine absolute gebrochene Zahl $= \frac{\alpha}{\beta}$, wo α und β ganze Zahlen sein sollen. Dann ist zu erweisen

$$\varphi\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = (1 + x)^{\frac{\alpha}{\beta}} = \sqrt[\beta]{(1 + x)^\alpha},$$

und diese Gleichung wird richtig sein, wenn $\varphi\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$ mit β potenzirt $= (1 + x)^\alpha$ wird. Dies ist der Fall; denn nach (2) im vorherg. §. ist

$$\left[\varphi\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right]^\beta = \varphi\left(\frac{\alpha}{\beta} \cdot \beta\right) = \varphi(\alpha),$$

und da α eine ganze Zahl ist, so ist nach dem in (1) Erwiesenen

$$\varphi(\alpha) = (1 + x)^\alpha;$$

also ist auch $$\left[\varphi\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right]^\beta = (1 + x)^\alpha,$$

folglich $$\varphi\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \sqrt[\beta]{(1 + x)^\alpha} = (1 + x)^{\frac{\alpha}{\beta}}.$$

3) Wenn man m = 0 annimmt, so verwandelt sich die Gleichung ($\odot$) in

$$\varphi(0) = 1,$$

und bekanntlich ist auch $(1 + x)^0 = 1$,

folglich ist $\varphi(0) = (1 + x)^0$.

4) Wenn endlich m negativ $= -m'$ angenommen wird, wo m' eine absolute Zahl vorstellen soll, so hat man zu erweisen die Gleichung

$$\varphi(-m') = (1 + x)^{-m'} = \frac{1}{(1 + x)^{m'}},$$

oder was offenbar dasselbe ist

$$\varphi(-m') \cdot (1 + x)^{m'} = 1.$$

Da m' eine absolute Zahl ist, so kann man zufolge (2) setzen

$$(1 + x)^{m'} = \varphi(m'),$$

folglich $$\varphi(-m')(1 + x)^{m'} = \varphi(-m') \cdot \varphi(m').$$

Nun ist aber vermöge (1) im vorherg. §. und zufolge des so eben in (3) Erwiesenen

$$\varphi(-m') \cdot \varphi(m') = \varphi(-m' + m') = \varphi(0) = 1,$$

---

*) In dieser Allgemeinheit ist der Satz zuerst von Newton ums Jahr 1676 angewendet worden; derselbe hat überhaupt zuerst unendliche Reihen in umfassender Weise in Anwendung gebracht.

also auch $$\varphi(-m') \cdot (1+x)^{m'} = 1$$

oder $$\varphi(-m') = \frac{1}{(1+x)^{m'}} = (1+x)^{-m'}.$$

Demnach ist ganz allgemein, was auch immer m bezeichnen mag,

$$(1+x)^m = 1 + m_1 x + m_2 x^2 + m_3 x^3 + \ldots$$

Bem. Die so eben aufgeführte Gleichung gilt jedoch, wenn m nicht gerade eine absolute ganze Zahl bezeichnet, sondern einer gebrochenen oder einer negativen Zahl gleich gedacht wird, natürlich nur unter der Voraussetzung, daß die Reihe convergirt, und zugleich muß der Dignand $1 + x > 0$ sein, indem nur unter dieser Voraussetzung in der Arithmetik (§. 229 u. 232) die Sätze über gebrochene und Differenz-Potenzen erwiesen sind. — Wie man sogleich sehen wird, ist diese letzte Bedingung in der ersten mit eingeschlossen.

§. 54. Lehrsatz.

Die Reihe

$$1 + m_1 x + m_2 x^2 + m_3 x^3 + \ldots$$

ist convergent, wenn absolut genommen

$$x < 1$$

ist, und die Reihe divergirt, wenn $x > 1$ ist.

Bew. Das allgemeine Glied der Reihe ist

$$m_n x^n = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} x^n,$$

und das nächstfolgende ist

$$m_{n+1} x_{n+1} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n+1)} x_{n+1}$$

$$= \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)(m-n)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n \cdot (n+1)} x^{n+1}.$$

Dividirt man dieses durch jenes, so erhält man zum Quotienten

$$\frac{m_{n+1} x^{n+1}}{m_n x^n} = \frac{m-n}{n+1} x = -\left(\frac{n-m}{n+1}\right) x = -\left(\frac{1-\frac{m}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right) x$$

und folglich für $n = \infty$, was auch immer m bezeichnen mag,

$$q = -x.$$

Zufolge §. 42 wird also die binomische Reihe convergiren, wenn absolut genommen

$$x < 1$$

ist, und sie wird divergiren, wenn $x > 1$ ist.

Anm. Die nun allgemein erwiesene binomische Reihe macht es möglich, auch ohne logarithmische Tafeln Näherungswerthe irrationaler Wurzeln zu berechnen. Man wird nämlich, um $\sqrt[n]{a}$ zu finden, die Zahl a in zwei Theile b und $\pm z$ so zerlegen, daß $\sqrt[n]{b}$ rational, und damit die Reihe convergire, $z < b$ ist. Dann ist

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{(b \pm z)} = \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{\left(1 \pm \frac{z}{b}\right)};$$

der erste Factor dieses Products $\sqrt[n]{b}$ ist als bekannt vorausgesetzt, und der andere läßt sich nach dem vorherg. §. entwickeln. — Einige Beispiele mögen das Verfahren noch näher erläutern:

1) Es sei zunächst $\sqrt[5]{40}$ näherungsweise zu bestimmen. Da diese Wurzel zwischen 2 und 3, aber viel näher an 2 als an 3 liegt, indem $2^5 = 32$, $3^5 = 243$ ist, so setze man

$$\sqrt[5]{40} = \sqrt[5]{32+8} = \sqrt[5]{32 . \left(1 + \frac{8}{32}\right)} = 2\sqrt[5]{\left(1 + \frac{1}{4}\right)}.$$

Dann ist nach der binomischen Reihe

$$\left(1 + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{5}} = 1 + \frac{1}{5} . \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{5}\right)_2 . \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)_3 . \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \ldots$$
$$= 1 + 0{,}05 - 0{,}005 + 0{,}00075 - \ldots$$
$$= 1{,}04575,$$

(wo man bei Berechnung der einzelnen Glieder mit Vortheil die Anm. zu §. 271 der Arithm. anwendet.)

Da in der obigen Reihe jedes folgende Glied kleiner ist, als der vierte Theil des vorhergehenden, so ist nach §. 41 Anm. 2 die Summe der weggelassenen Glieder gewiß kleiner als der dritte Theil des letzten beibehaltenen Gliedes, also $< 0{,}00025$. Man hat daher bis zur dritten Decimalstelle genau

$$\sqrt[5]{40} = 2 . 1{,}04575 = 2{,}0915.$$

2) Ist $\sqrt[7]{100}$ näherungsweise zu bestimmen, so wird man, da dieselbe zwischen 1 und 2, aber näher an 2 liegt, zunächst

$$\sqrt[7]{100} = \sqrt[7]{(128-28)} = \sqrt[7]{128 . \left(1 - \frac{28}{128}\right)} = 2 . \sqrt[7]{\left(1 - \frac{7}{32}\right)}$$

und dann weiter setzen

$$\left(1 - \frac{7}{32}\right)^{\frac{1}{7}} = 1 - \frac{1}{7} . \frac{7}{32} + \left(\frac{1}{7}\right)_2 . \left(\frac{7}{32}\right)^2 - \left(\frac{1}{7}\right)_3 . \left(\frac{7}{32}\right)^3 + \left(\frac{1}{7}\right)_4 . \left(\frac{7}{32}\right)^4 - \ldots$$

$$= \left\{\begin{array}{l} +\ 1{,}00000 \\ -\ 0{,}03125 \\ -\ 0{,}00293 \\ -\ 0{,}00040 \\ -\ 0{,}00006 \end{array}\right.$$
$$= +\ 0{,}96536.$$

Da in der obigen Reihe jedes folgende Glied kleiner ist, als der vierte Theil des vorhergehenden, also die Summe der weggelassenen Glieder weniger als ein Drittel des letzten beibehaltenen Gliedes beträgt, so hat man bis zur vierten Decimalstelle richtig

$$\sqrt[7]{100} = 2 . 0{,}96536 = 1{,}9307.$$

3) Soll $\sqrt[3]{2}$ gesucht werden, so wird weder die Zerlegung in $\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{(1+1)}$, noch in $\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{(8-6)} = 2\sqrt[3]{(1-\frac{3}{4})}$ eine rasch convergirende Reihe liefern. Man wird es daher vorziehen, sich die erste Decimalstelle der gesuchten Wurzel auf dem Wege des Versuchs zu verschaffen. Man findet dann bald, daß $\sqrt[3]{2}$ zwischen 1,2 und 1,3 liegt, indem $(1{,}2)^3 = 1{,}728$ und $(1{,}3)^3 = 2{,}197$ ist. Hiernach wird man weiter setzen

$$\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{(2{,}197 - 0{,}197)} = \sqrt[3]{2{,}197 . \left(1 - \frac{0{,}197}{2{,}197}\right)} = 1{,}3 . \sqrt[3]{\left(1 - \frac{197}{2197}\right)}$$

und $$\left(1-\frac{197}{2197}\right)^{\frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{197}{2197} + \left(\frac{1}{3}\right)_2 \cdot \left(\frac{197}{2197}\right)^2 + \ldots$$

$$= \begin{cases} +\,1{,}00000 \\ -\,0{,}02989 \\ -\,0{,}00090 \\ -\,0{,}00004 \end{cases}$$

$$= +\,0{,}96917.$$

Da in der obigen Reihe jedes folgende Glied kleiner als $\frac{1}{11}$ des vorhergehenden ist, so hat man etwa bis zur fünften Decimalstelle

$$\sqrt[3]{2} = 1{,}3\,.\,0{,}96917 = 1{,}25992.$$

Allerdings führen Logarithmentafeln im allgemeinen viel rascher zum Ziele, als das hier auseinandergesetzte Verfahren; dieses hat aber darin wesentliche Vorzüge, daß es sich ganz aus dem Kopfe ohne Anwendung vorher berechneter Tafeln ausführen läßt, und daß man durch dasselbe jede Wurzel so genau, als man immer will, finden kann, während Logarithmentafeln sich auf eine bestimmte Anzahl von Decimalstellen beschränken.

Bem. In den vorhergehenden Sätzen über unendliche nach ganzen Potenzen einer Veränderlichen fortschreitende Reihen ist, wie man leicht bemerkt haben wird, zuerst von der Addition, Subtraction und Multiplication, demnächst von der Division und zuletzt vom Potenziren die Rede gewesen. Bei der Potenz sind indeß zwei Fälle zu unterscheiden; es wird nämlich entweder der Dignand oder der Exponent als veränderlich gedacht. Der erste Fall ist bereits im binomischen Lehrsatz erledigt; die Behandlung des andern Falles, nämlich die Entwickelung der Exponentialreihe, bildet den Gegenstand der nächsten Paragraphen, woran sich dann die Ableitung der logarithmischen Reihe anschließen wird. Denn für die Wurzel bedarf es offenbar keiner besondern Entwicklung, da dieselbe sich allemal durch eine gebrochene Potenz ersetzen läßt.

E. Die Exponential- und die logarithmische Reihe.

§. 55. Aufgabe.

Die Potenz a^x, in welcher $a > 0$ und x ganz beliebig gedacht wird, in eine nach ganzen Potenzen von x fortschreitende Reihe zu entwickeln.

Aufl. Indem wir die Möglichkeit dieser Entwicklung voraussetzen*), haben wir nur nöthig, die Coefficienten der einzelnen Glieder der Reihe zu bestimmen. Wir nehmen an, diese seien A_0, A_1, $A_2 \ldots$, und setzen also

$$a^x = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \ldots$$

Den Coefficienten A_0 erhalten wir sogleich, wenn wir in der vorstehenden Gleichung $x = 0$ annehmen, wodurch dieselbe übergeht in

$$a^0 = A_0 \text{ oder } 1 = A_0.$$

Setzen wir diesen Werth in die obige Gleichung ein, so verwandelt sich dieselbe in

$$1)\quad a^x = 1 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \ldots$$

*) Vergl. die Vorrede.

Um die übrigen Coefficienten zu finden, müssen wir zu Bestimmungsgleichungen zwischen denselben zu gelangen suchen. Diese ergeben sich aus der allgemeinen Gleichung

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}.$$

Da nämlich in der Gleichung (1) x jeden beliebigen Ausdruck bezeichnen kann und die Coefficienten von dem jedesmaligen Werthe der Veränderlichen x ganz unabhängig sind, so werden wir in der Gleichung (1) auch y und x + y statt x setzen können. Hierdurch verwandelt sich jene Gleichung in

$$2)\quad a^y = 1 + A_1 y + A_2 y^2 + A_3 y^3 + \ldots$$

und $$3)\quad a^{(x+y)} = 1 + A_1 (x+y) + A_2 (x+y)^2 + A_3 (x+y)^3 + \ldots$$

Entwickeln wir in der letzten Reihe die Potenzen von x + y nach dem binomischen Satze, und ordnen wir dann die Reihe nach ganzen Potenzen von y, so erhalten wir

$$4)\quad a^{x+y} = \begin{cases} 1 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots \\ + (A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + 4A_4 x^3 + \ldots) y \\ + (A_2 + 3A_3 x + 6A_4 x^2 + 10A_5 x^3 + \ldots) y^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Aus (1) und (2) folgt aber

$$5)\quad a^x \cdot a^y = \begin{cases} 1 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots \\ + (A_1 + A_1 \cdot A_1 x + A_1 A_2 x^2 + A_1 A_3 x^3 + \ldots) y \\ + (A_2 + A_2 \cdot A_1 x + A_2 A_2 x^2 + A_2 A_3 x^3 \ldots) y^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Da die Reihen (4) und (5) für jeden Werth von y identisch sein müssen, so müssen auch nach §. 45 die Coefficienten der gleich hohen Potenzen von y, welche hier unendliche Reihen nach x sind, in beiden dieselben sein. Diese Identität fällt nun zunächst für die Glieder ohne y unmittelbar in die Augen; sie muß aber auch für alle folgenden Glieder, also zuerst insbesondere für die Glieder mit dem Factor y stattfinden. Wir werden daher setzen können

$$A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + 4A_4 x^3 + \ldots$$
$$= A_1 + A_1 A_1 x + A_1 A_2 x^2 + A_1 A_3 x^3 + \ldots;$$

und da diese Gleichung für jeden Werth von x gelten soll, so folgt aus derselben wieder nach §. 45

$$A_1 = A_1,$$

$$2A_2 = A_1 \cdot A_1, \text{ also } A_2 = \frac{A_1^2}{1 \cdot 2},$$

$$3A_3 = A_1 A_2, \quad " \quad A_3 = \frac{A_1^3}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

$$4A_4 = A_1 A_3, \quad " \quad A_4 = \frac{A_1^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4},$$

u. s. f.

wo man sehr leicht erkennt, daß das in den ersten Gliedern deutlich ausgesprochene Gesetz auch für alle folgenden Coefficienten gelten muß.

In den vorstehenden Gleichungen ist nur A_1 unbestimmt geblieben, zu dessen Ableitung uns jedoch der folgende §. führen wird. Denken wir uns dasselbe bereits gefunden, so erhalten wir die Gleichung

$$\odot)\quad a^x = 1 + \frac{A_1 x}{1} + \frac{(A_1 x)^2}{1 \cdot 2} + \frac{(A_1 x)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{(A_1 x)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots$$

§. 56. Zusatz.

1) **Die unendliche Reihe**

$$a^x = 1 + A_1 x + \frac{(A_1 x)^2}{1 \cdot 2} + \frac{(A_1 x)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{(A_1 x)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots$$

ist für jeden Werth von x convergent. Denn das allgemeine Glied dieser Reihe ist

$$\frac{(A_1 x)^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n},$$

und das folgende Glied ist

$$\frac{(A_1 x)^{n+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n+1)};$$

und wenn man dieses Glied durch jenes dividirt, so erhält man zum Quotienten

$$\frac{A_1 x}{n + 1},$$

also für $n = \infty$, was auch immer x bezeichnen mag,

$$q = \frac{A_1 x}{\infty} = 0.$$

Demnach ist die obige Reihe für alle möglichen Werthe von x convergent.

2) Da hiernach x jeden beliebigen Ausdruck bezeichnen kann, so läßt sich auch $x = \frac{1}{A_1}$ setzen.

Durch diese Substitution verwandelt sich die Gleichung ($\odot$) in die folgende

$$1)\quad a^{\frac{1}{A_1}} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist von a und A_1 ganz unabhängig und stellt also eine ganz bestimmte Zahl vor. Man pflegt diese **sehr bemerkenswerthe Zahl** durch e zu bezeichnen und findet durch Summirung der vorstehenden ziemlich rasch convergirenden Reihe näherungsweise

$$e = 2{,}7182818 \ldots$$

3) Die Gleichung (1), welche sich jetzt kürzer so schreiben läßt:

$$a^{\frac{1}{A_1}} = e \text{ oder } a = e^{A_1}$$

bietet uns ein Mittel dar, um zu einem gegebenen Werthe von a das zugehörige A_1 zu finden. Nimmt man nämlich auf beiden Seiten der letzten Gleichung die Logarithmen irgend eines Systems, z. B. des Brigg'schen, so hat man

$$\log a = A_1 \log e$$

oder 2)

$$A_1 = \frac{\log a}{\log e}.$$

4) Da in der oben angeführten Gleichung (2), welche uns zu einem gegebenen Werthe von a den zugehörigen Werth von A_1 finden lehrt, a jede beliebige absolute Zahl bezeichnen kann, so kann im besondern Falle auch a = e sein; in diesem besondern Falle ist vermöge der Gleichung (2)

$$A_1 = \frac{\log e}{\log e} = 1.$$

Setzt man nun in der Gleichung (⊙) des §. 55 a = e und folglich $A_1 = 1$, so erhält diese Gleichung ihre einfachste Gestalt, in der sie am häufigsten Anwendung findet:

$$(☾) \quad e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \,.\, 2} + \frac{x^3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} = \frac{x^4}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} + \ldots\text{*)}$$

Man pflegt diese Reihe vorzugsweise die Exponentialreihe zu nennen.

5) Denkt man sich ein Logarithmensystem gebildet, welches die Basis a hat, so heißt das im Vorhergehenden viel besprochene zugehörige A_1 der Modulus dieses Systems. Dasjenige System, welches die Basis e hat, hat zum Modulus, wie man so eben gesehen, 1 und wird das natürliche Logarithmensystem**) genannt. Im Folgenden sollen die natürlichen Logarithmen durch log nat bezeichnet werden.

6) Da man in der Gleichung (2) statt der Brigg'schen eben so gut natürliche Logarithmen nehmen kann, so kann man auch

$$3) \quad A_1 = \frac{\log \text{nat } a}{\log \text{nat } e} = \log \text{nat } a$$

setzen, indem log nat e offenbar = 1 ist. Hiernach kann man der Gleichung (⊙) des §. 55. auch folgende Gestalt geben:

$$𝔡) \quad a^x = 1 + x \log \text{nat } a + \frac{(x \log \text{nat } a)^2}{1 \,.\, 2} + \frac{(x \log \text{nat } a)^3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} + \ldots$$

Bem. Bei der Aufgabe, die Logarithmen durch unendliche Reihen auszudrücken, gehen wir am einfachsten von den natürlichen Logarithmen aus. Die Aufgabe kann jedoch nicht dahin gestellt werden, log nat x in eine unendliche, nach ganzen Potenzen von x fortschreitende Reihe zu entwickeln, da in jedem Logarithmensystem log 0 = — ∞ ist. Wir bekommen vielmehr die Auflösung dieser Aufgabe in der Fassung des folgenden §.

§. 58. Lehrsatz.

So lange (absolut genommen) u < 1 ist, ist

$$\log \text{nat } (1 + u) = u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{4}u^4 + \ldots$$

Bew. Zufolge §. 57 ist

$$(1 + u)^x = 1 + x \log \text{nat } (1 + u) + \frac{x^2}{1 \,.\, 2}[\log \text{nat } (1 + u)]^2$$
$$+ \frac{x^3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}[\log \text{nat } (1 + u)]^3 + \ldots$$

*) Diese Reihe ist zuerst von Newton aufgestellt worden.

**) Die natürlichen Logarithmen werden auch Neper'sche genannt, weil sie von einem schottischen Baron Napier erfunden worden sind.

und nach dem binomischen Lehrsatze können wir setzen

$$(1+u)^x = 1 + \frac{x}{1}u + \frac{x(x-1)}{1.2}u^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}u^3 + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3.4}u^4 + \ldots$$

Die erstere Reihe schreitet nach den ganzen Potenzen von x, die letztere nach den ganzen Potenzen von u fort; wir können jedoch auch diese in eine nach den ganzen Potenzen von x fortschreitende Reihe umformen, wenn wir die Coefficienten der einzelnen Glieder entwickeln und dann nach den Potenzen von x ordnen. Stellen wir die so umgeformte zweite Reihe mit der ersten zusammen, so müssen nach §. 45 die Coefficienten der gleich hohen Potenzen von x in beiden dieselben sein. Der Coefficient der ersten Potenz von x ist in der ersten Reihe

$$\log \text{nat}\,(1+u)$$

und in der anderen, wie man leicht erkennt, wenn man sich dieselbe in der angegebenen Weise umgestaltet denkt,

$$u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \frac{u^4}{4} + \ldots$$

Dem zufolge ist

$$\log \text{nat}\,(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \ldots$$

§. 59. Zusatz.

Die so eben erhaltene Reihe convergirt, so lange u ein ächter Bruch ist.

Denn wenn man — abgesehn vom Vorzeichen — mit dem nten Gliede $\frac{u^n}{n}$ in das $n+1$te Glied $\frac{u^{n+1}}{n+1}$ dividirt, so erhält man zum Quotienten

$$\frac{n}{n+1}u = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}u,$$

also für $n = \infty$

$$q = \frac{1}{1+\frac{1}{\infty}}.\,u = u.$$

Demnach convergirt vermöge §. 42 die obige Reihe, so lange

$$u < 1$$

ist, und sie divergirt, wenn $u > 1$ ist.

§. 60. Zusatz.

Wenn man in der Gleichung

$$1)\quad \log \text{nat}\,(1+u) = u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{4}u^4 + \ldots$$

— u an die Stelle von u setzt, so erhält man

$$2)\quad \log \text{nat}\,(1-u) = -u - \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{4}u^4 \ldots$$

Aus (1) und (2) folgt durch Subtraction

$$3)\quad \log \text{nat}\left(\frac{1+u}{1-u}\right) = 2\left(u + \frac{1}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 + \ldots\right)$$

Setzt man $\frac{1+u}{1-u} = x$, also $u = \frac{x-1}{x+1}$,

so verwandelt sich die letzte Gleichung in

$$4) \quad \log \text{nat}\, x = 2\left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \ldots\right],$$

eine Reihe, welche für jeden positiven Werth von x convergirt. Weil aber diese Reihe für größere Werthe von x nur langsam convergirt, so setze man noch

$$x = \frac{n+z}{n}, \text{ folglich } \frac{x-1}{x+1} = \frac{z}{2n+z}$$

in die letzte Gleichung, wodurch dieselbe, da

$$\log\left(\frac{n+z}{n}\right) = \log(n+z) - \log n$$

ist, übergeht in

$$\log \text{nat}\,(n+z) = \log \text{nat}\, n + 2\left[\frac{z}{2n+z} + \frac{1}{3}\left(\frac{z}{2n+z}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z}{2n+z}\right)^5 + \ldots\right].$$

Mit Hülfe dieser Reihe, welche um so stärker convergirt, je größer n in Vergleich gegen z ist, findet man log nat (n + z), wenn log nat n bekannt ist.

Anm. Setzt man n = 1 und z = 1, so erhält man, da log 1 = 0 ist,

$$\log \text{nat}\, 2 = 2\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^5 + \ldots\right] = 0{,}69315\ldots$$

Setzt man ferner n = 2, z = 1, so ergibt sich

$$\log \text{nat}\, 3 = \log \text{nat}\, 2 + 2\,.\left[\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^3 + \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^5 + \ldots\right] = 1{,}09861\ldots$$

Nun kennt man auch

$$\log \text{nat}\, 4 = 2 \log \text{nat}\, 2 = 1{,}386294\ldots$$

Hieraus findet man weiter, wenn man n = 4, z = 1 setzt,

$$\log \text{nat}\, 5 = \log \text{nat}\, 4 + 2\left[\frac{1}{9} + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^3 + \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^5 + \ldots\right] = 1{,}60944\ldots$$

u. dgl. m.

§. 61. Zusatz.

Aus den natürlichen Logarithmen ergeben sich aber auch die Logarithmen jedes andern Systems. Denn ist z. B. x der Logarithmus der Zahl a für die Basis k, also

$$k^x = a,$$

so hat man, wenn man auf beiden Seiten die natürlichen Logarithmen nimmt,

$$x \log \text{nat}\, k = \log \text{nat}\, a,$$

folglich

$$\overset{k}{\log}\, a^{*)} = x = \frac{\log \text{nat}\, a}{\log \text{nat}\, k}.$$

*) Lies: Logarithmus a für die Basis k.

Um also aus dem natürlichen Logarithmen einer Zahl den künstlichen, d. h. den Logarithmen eines andern Systems zu erhalten, hat man nur nöthig, dieselbe durch den Modulus dieses Systems (§. 57, 5) zu dividiren.

Anm. 1. Für das Brigg'sche System, in welchem $k = 10$ ist, hat man

$$\log \text{nat}\, 10 = \log \text{nat}\, 2 + \log \text{nat}\, 5 = 2{,}30259\ldots$$

und
$$\frac{1}{\log \text{nat}\, 10} = 0{,}43429\ldots$$

Anm. 2. Es sei a eine beliebige positive Zahl, z eine im Verhältniß zu a sehr kleine positive oder negative Zahl; dann ist

$$\log \text{nat}\,(a + z) - \log \text{nat}\, a = \log \text{nat}\, \frac{a + z}{a} = \log \text{nat}\left(1 + \frac{z}{a}\right)$$
$$= \frac{z}{a} - \frac{1}{2}\frac{z^1}{a^2} + \frac{1}{3}\frac{z^3}{a^3} - \ldots$$

Da nach unsrer Annahme $\frac{z}{a}$ einen sehr kleinen Bruch vorstellt, so werden wir annähernd setzen können

$$\log \text{nat}\,(a + z) - \log \text{nat}\, a = \frac{z}{a},$$

d. h. die Differenz der Logarithmen zweier nur wenig von einander verschiedenen Zahlen (Numeri) ist der Differenz dieser Zahlen (Numeri) nahezu proportional; ein Satz, auf welchem das Interpoliren beim Gebrauche der Logarithmentafeln beruht; denn dieser Satz gilt nicht bloß von den natürlichen, sondern vermöge der Gleichung

$$\overset{k}{\log}\, a = \frac{\log \text{nat}\, a}{\log \text{nat}\, k}$$

von den Logarithmen jedes beliebigen Systems.

F. Die cyklischen Funktionen.

§. 62. Aufgabe.

Die trigonometrischen Functionen

$$\sin x \text{ und } \cos x$$

in unendliche nach ganzen Potenzen von x fortschreitende Reihen zu entwickeln,*) wobei x die Maßzahl des durch den Radius als Einheit gemessenen Bogens bezeichnet.

Aufl. Angenommen, es sei

$$\sin x = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots$$
$$\cos x = B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 + \ldots$$

Da für $x = 0$ $\sin x = 0$ und $\cos x = 1$ werden muß, so hat man in der erstern Reihe $A_0 = 0$ und in der andern $B_0 = 1$ zu setzen. Weil ferner für jeden Werth von x

$$\sin(-x) = -\sin x \text{ und } \cos(-x) = +\cos x$$

ist und die ungeraden Potenzen von x gleichzeitig mit x positiv und negativ werden, während die Potenzen mit geraden Exponenten ungeändert bleiben, so sieht man leicht, daß in der ersten Reihe die Coefficienten der geraden

*) Wir setzen hier eben so wie bei §. 55 die Möglichkeit der Reihenentwicklung voraus.

Potenzen von x $A_2, A_4, A_6 \ldots$ und in der zweiten die Coefficienten der ungeraden Potenzen von x $B_1, B_2, B_3 \ldots$ sämmtlich gleich Null zu setzen sind. Es haben daher die zu suchenden Reihen folgende Formen:

1) $\sin x = A_1 x + A_3 x^3 + A_5 x^5 + \ldots$

2) $\cos x = 1 + B_2 x^2 + B_4 x^4 + B_6 x^6 + \ldots$

Nun lassen sich zunächst die Coefficienten der zweiten Reihe mit Hülfe der allgemeinen trigonometrischen Gleichung

$$\cos(x + y) + \cos(x - y) = 2 \cos x \cos y$$

bestimmen. Denn wenn man in der Gleichung (2) y statt x setzt, so erhält man

$$\cos y = 1 + B_2 y^2 + B_4 y^4 + B_6 y^6 + \ldots$$

Aus dieser Gleichung und (2) folgt durch Multiplication, wenn man das Product nach den Potenzen von y ordnet,

$$3)\quad \begin{aligned} \cos x \cos y = {} & 1 + B_2 x^2 + B_4 x^4 + B_6 x^6 + \ldots \\ & + (B_2 + B_2 B_2 x^2 + B_2 B_4 x^4 + B_2 B_6 x^6 + \ldots) y^2 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Weiter kann man aber auch in der Gleichung (2) x + y und x — y an die Stelle von x setzen; hierdurch erhält man, wenn man die entstandenen Potenzen nach dem binomischen Satze entwickelt,

$$4)\quad \begin{aligned} \cos(x + y) = 1 & + B_2 x^2 + B_4 x^4 && + B_6 x^6 + \ldots \\ & + 2B_2 xy + 4B_4 x^3 y && + 6B_6 x^5 y + \ldots \\ & + B_2 y^2 + \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} B_4 x^2 y^2 && + \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} B_6 x^4 y^2 + \ldots \\ & \qquad + 4B_4 xy^3 && + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} B_6 x^3 y^3 + \ldots \\ & \qquad + B_4 y^4 && + \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} B_6 x^2 y^4 + \ldots \\ & && + 6B_6 xy^5 + \ldots \\ & && + B_6 y^6 + \ldots \end{aligned}$$

$$5)\quad \begin{aligned} \cos(x - y) = 1 & + B_2 x^2 + B_4 x^4 && + B_6 x^6 + \ldots \\ & - 2B_2 xy - 4B_4 x^3 y && - 6B_6 x^5 y + \ldots \\ & + B_2 y^2 + \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} B_4 x^2 y^2 && + \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} B_6 x^4 y^2 + \ldots \\ & \qquad - 4B_4 xy^3 && - \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} B_6 x^3 y^3 + \ldots \\ & \qquad + B_4 y^4 && + \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} B_6 x^2 y^4 + \ldots \\ & && - 6B_6 xy^5 + \ldots \\ & && + B_6 y^6 + \ldots \end{aligned}$$

Durch Addition ergibt sich aus (4) und (5), wenn man beiderseits durch 2 dividirt und die Reihe nach den Potenzen von y ordnet,

$$6)\quad \frac{\cos(x + y) + \cos(x - y)}{2} = \left\{ \begin{array}{l} 1 + B_2 x^2 + B_4 x^4 + B_6 x^6 + \ldots \\ + \left(B_2 + \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} B_4 x^2 + \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} B_6 x^4 + \ldots\right) y^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Da die Gleichungen (3) und (6) für jeden Werth von y identisch sein müssen, so müssen auch die Coefficienten gleich hoher Potenzen von y in beiden dieselben sein; hiernach erhält man insbesondere für die Coefficienten von y^2 die Gleichung

$$B_2 + B_2B_2x^2 + B_2B_4x^4 + B_2B_6x^6 + \ldots$$
$$= B_2 + \frac{4\,.\,3}{1\,.\,2}B_4x^2 + \frac{6\,.\,5}{1\,.\,2}B_6x^4 + \frac{8\,.\,7}{1\,.\,2}B_8x^6 + \ldots,$$

und da diese Gleichung wieder für jeden Werth von x gelten muß, so folgt aus derselben

$$B_2 = B_2$$
$$B_2\,.\,B_2 = \frac{4\,.\,3}{1\,.\,2}B_4, \text{ also } B_4 = \frac{(2B_2)^2}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}$$
$$B_2B_4 = \frac{6\,.\,5}{1\,.\,2}B_6, \quad " \quad B_6 = \frac{(2B_2)^3}{1\,.\,2\ldots 6}$$
$$B_2B_6 = \frac{8\,.\,7}{1\,.\,2}B_8, \quad " \quad B_8 = \frac{(2B_2)^4}{1\,.\,2\ldots 8}$$

u. s. f.

Aus der vorstehenden Entwicklung ist leicht zu sehen, daß auch alle folgenden Coefficienten dasselbe Gesetz befolgen, und daß also allgemein

$$B_{2n} = \frac{(2B_2)^n}{1\,.\,2\ldots 2n}$$

ist. — Nur den Coefficienten B_2 haben die obigen Gleichungen unbestimmt gelassen; die Entwicklung der Reihe für sin x wird uns jedoch die Mittel, diesen zu finden, darbieten.

Zur Bestimmung der Coefficienten der Reihe für sin x führt uns die Gleichung

$$\cos(x-y) - \cos(x+y) = 2 \sin x \sin y.$$

Aus (4) und (5) ergibt sich, wenn man nach ganzen Potenzen von y ordnet,

$$7)\quad \frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2} = \begin{cases} -(2B_2x+4B_4x^3+6B_6x^5+8B_8x^7+\ldots)y \\ -\left(4B_4x+\frac{6\,.\,5\,.\,4}{1\,.\,2\,.\,3}B_6x^3+\ldots\ldots\right)y^3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Nach der Annahme ist

$$\sin x = A_1x + A_3x^3 + A_5x^5 + A_7x^7 + \ldots,$$
$$\sin y = A_1y + A_3y^3 + A^5y^5 + A_7y^7 + \ldots,$$

folglich, nach ganzen Potenzen von y geordnet,

$$8)\quad \sin x\,.\,\sin y = \begin{cases} (A_1A_1x + A_1A_3x^3 + A_1A_5x^5 + A_1A_7x^7 + \ldots)y \\ +\,(A_3A_1x + A_3A_3x^3 + + \ldots\ldots\ldots)y^3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Weil aber die Reihen (7) und (8) für jeden Werth von x und y identisch sein müssen, so hat man zuerst

$$-\,2B_2x - 4B_4x^3 - 6B_6x^5 - 8B_8x^7 - \ldots$$
$$= A_1A_1x + A_1A_3x^3 + A_1A_5x^5 + A_1A_7x^7 + \ldots,$$

und hieraus dann weiter

$$-2B_2 = A_1^2, \text{ also } 2B_2 = -A_1^2$$

$$-4B_4 = A_1A_3, \;\; " \;\; A_3 = -\frac{(2B_2)^2}{1.2.3.4}\cdot\frac{4}{A_1} = -\frac{A_1^3}{1.2.3}$$

$$-6B_6 = A_1A_5, \;\; " \;\; A_5 = -\frac{(2B_2)^3}{1.2\ldots6}\cdot\frac{6}{A_1} = +\frac{A_1^5}{1.2..5}$$

$$-8B_8 = A_1A_7, \;\; " \;\; A_7 = -\frac{(2B_2)^4}{1.2..8}\cdot\frac{8}{A_1} = -\frac{A_1^7}{1.2..7}$$

u. s. f.

Auch hier ist die Allgemeinheit des Gesetzes und die Gültigkeit desselben für alle folgenden Glieder leicht zu erkennen.

Durch die vorstehende Entwicklung ist die Aufsuchung von B_2 auf die Bestimmung von A_1 zurückgeführt, welches jedoch die vorhergehenden Gleichungen ebenfalls unbestimmt gelassen haben. Zur Auffindung desselben dient folgende Ueberlegung:

Es sei AB, Fig. 8, ein beliebiger Kreisbogen, von welchem wir nur voraussetzen, daß er kleiner ist, als ein Quadrant; tragen wir dann von A aus auf den Kreis den AB gleichen Bogen AD auf, verbinden B mit D, ziehen durch B und D Tangenten, welche sich in F treffen und verbinden diesen Punkt mit dem Mittelpunkte C, so ist nach bekannten geometrischen Sätzen*)

Sehne BD < Bogen BAD,

aber BF + DF > Bogen BAD,

folglich auch BE < Bogen AB, aber BF > Bogen AB.

Denken wir uns nun die Linien BE und BF und den Bogen AB durch den Radius als Einheit gemessen, und bezeichnen wir die Maßzahl des Bogens mit x, so ist

$$\sin x = BE \text{ und } \operatorname{tang} x = BF,$$

also zufolge des Vorstehenden

$$\sin x < x, \text{ aber } \operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\cos x} > x,$$

folglich

$$\frac{\sin x}{x} < 1, \text{ aber } \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

Demnach liegt der Bruch $\frac{\sin x}{x}$ zwischen den Grenzen 1 und cos x; weil aber für in's Unendliche abnehmende Werthe von x der cos x sich der Grenze 1 unendlich nähert, so wird dasselbe um so mehr von dem Bruche $\frac{\sin x}{x}$ gelten müssen. — Nun ist nach der obigen Annahme

$$\sin x = A_1x + A_3x^3 + A_5x^5 + \ldots,$$

also

$$\frac{\sin x}{x} = A_1 + A_3x^2 + A_5x^4 + \ldots$$

Hiernach nähert sich für sehr kleine Werthe von x der Bruch $\frac{\sin x}{x}$ offenbar der Grenze A_1; man hat aber so eben für diese Grenze den ganz bestimmten Werth 1 gefunden, folglich ist

$$A_1 = 1.$$

*) Planimetrie §. 66 — 68.

Ist nun A_1 bekannt, so ergeben sich aus den obigen Gleichungen die übrigen Coefficienten, nämlich

$$A_3 = -\frac{1}{1.2.3},\ A_5 = +\frac{1}{1.2..5},\ A_7 = -\frac{1}{1.2..7} \text{ u. s. f.}$$

$$B_2 = -\frac{1}{1.2},\ B_4 = +\frac{1}{1.2.3.4},\ B_6 = -\frac{1}{1.2..6} \text{ u. s. f.}$$

Demnach hat man

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2..5} - \frac{x^7}{1.2..7} + \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2..6} + \ldots\text{*)}$$

§. 62. Lehrsatz.

Die Reihen für sin x und cos x convergiren für jeden Werth von x.

Bew. Denn in der Reihe für sin x ist, abgesehen vom Zeichen, das

$$\text{nte Glied} = \frac{x^{2n-1}}{1.2\ldots(2n-1)}$$

und das

$$n + 1\text{te} = \frac{x^{2n+1}}{1.2\ldots(2n+1)},$$

folglich, wenn man dieses durch jenes dividirt, der Quotient

$$= \frac{x^2}{2n.(2n+1)},$$

also für $n = \infty$, was auch immer x bezeichnen mag,

$$q = \frac{x^2}{\infty.\infty} = 0,$$

und daher nach §. 42 die Reihe für jeden Werth von x convergent.

In der Reihe für cos x ist das

$$\text{nte Glied} = \frac{x^{2n-2}}{1.2\ldots(2n-2)}$$

und das

$$n + 1\text{te} = \frac{x^{2n}}{1.2\ldots(2n)},$$

folglich der Quotient aus diesem, durch jenes dividirt,

$$= \frac{x^2}{(2n-1).2n},$$

also für $n = \infty$

$$q = \frac{x^2}{\infty.\infty} = 0.$$

Die Reihe für cos x convergirt daher ebenfalls für alle möglichen Werthe von x.

Anm. Den weniger geübten Leser wollen wir noch besonders darauf aufmerksam machen, daß in den vorher für sin x und cos x gefundenen Reihen x nicht den in Graden ausgedrückten, sondern den durch den Radius als Einheit gemessenen Bogen bezeichnen soll. Will man also z. B. nach jenen Formeln den Sinus oder Cosinus

*) Diese beiden Reihen sind zuerst von Newton (1675) angegeben worden.

eines Bogens von 1^0 berechnen, so wird man, da der Radius = 1 angenommen und die Maßzahl der halben Peripherie folglich $= \pi$ ist,

$$x = \frac{\pi}{180} = \frac{3{,}14159265}{180} = 0{,}01745329$$

zu setzen haben. Man findet dann in den ersten 7 Decimalstellen durch folgende leichte Rechnung

$$\begin{aligned} \sin 1^0 &= 0{,}01745329 - \tfrac{1}{6} \,.\, (0{,}01745329)^3 + \ldots \\ &= 0{,}01745329 - 0{,}00000087 \\ &= 0{,}0174524 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \cos 1^0 &= 1{,}00000000 - \tfrac{1}{2} \,.\, (0{,}01745329)^2 + \ldots \\ &= 1{,}00000000 - 0{,}00015231 \\ &= 0{,}9998477. \end{aligned}$$

Man kann nun Sinus und Cosinus der Winkel von 2^0, 3^0, $4^0 \ldots$ entweder eben so berechnen oder aus jenen ableiten. Durch Sinus und Cosinus sind aber auch

$$\text{tang} = \frac{\sin}{\cos}, \quad \text{cotg} = \frac{\cos}{\sin}, \quad \text{secans} = \frac{1}{\cos} \quad \text{und} \quad \text{cosec} = \frac{1}{\sin}$$

gegeben.

Bem. Man wird leicht die auffallende Uebereinstimmung der für Sinus und Cosinus erhaltenen Reihen mit der Exponentialreihe (§. 56) bemerken. Die letztere enthält sämmtliche Glieder jener beiden zusammen, nur mit der Verschiedenheit, daß in der Exponentialreihe alle Glieder additiv sind, während in den Reihen für Sinus und Cosinus additive und subtractive Glieder abwechseln. Es ist daher auch nicht möglich, jene Reihe aus diesen zusammenzusetzen, so lange x einen reellen Ausdruck bedeutet. Anders stellt sich jedoch das Verhältniß, wie im folgenden §. gezeigt wird, wenn man statt x den imaginären Ausdruck $x\sqrt{-1}$ setzt. Da im Folgenden mehrfach die imaginäre $\sqrt{-1}$ in Anwendung kommen wird, so soll der Kürze wegen dieselbe mit i bezeichnet werden. Dem gemäß lassen sich folgende Gleichungen aufstellen:

$$\begin{aligned} i^0 &= +1 & i^{4n} &= +1 \\ i^1 &= +i & i^{4n+1} &= +i \\ i^2 &= -1 & i^{4n+2} &= -1 \\ i^3 &= -i & i^{4n+3} &= -i \\ i^4 &= +1 & i^{4n+4} &= +1. \end{aligned}$$

§. 64. Lehrsatz.

Bezeichnet e die Basis des natürlichen Logarithmensystems, so ist

$$1)\quad e^{xi} = \cos x + i \sin x$$

und

$$2)\quad e^{-xi} = \cos x - i \sin x\text{*)}.$$

Bew. Wenn wir uns in der Gleichung (C) des §. 56 der in §. 11 des ersten Kapitels angegebenen abkürzenden Bezeichnungsweise bedienen, so erhält dieselbe die Form

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

---

*) Diese merkwürdigen Gleichungen werden gewöhnlich der Satz des Moivre genannt, obschon sie erst später von Euler (1742?) angegeben worden sind. Vergl. auch unten §. 71.

Setzen wir in dieser Gleichung xi an die Stelle von x, so verwandelt sich dieselbe in

$$e^{xi} = \begin{cases} 1 + \frac{xi}{1} - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3 i}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5 i}{5!} \\ - \frac{x^6}{6!} - \frac{x^7 i}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \frac{x^9 i}{9!} - \ldots \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \ldots \\ + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \ldots\right). \end{cases}$$

Demnach ist $e^{xi} = \cos x + i \sin x.$

Die Gleichung (2) aber wird entweder eben so wie (1) erwiesen oder aus dieser abgeleitet, indem man $-x$ statt x schreibt.

§. 65. Zusatz.

1) Durch Addition und Subtraction der im vorherg. §. erwiesenen Gleichungen (1) und (2) ergeben sich weiter die beiden folgenden merkwürdigen Gleichungen

$$\cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}$$

und

$$\sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i} \text{*)}.$$

2) Wenn wir ferner die Gleichungen (1) und (2) des vorhergehenden §. durcheinander dividiren, so erhalten wir

$$e^{2xi} = \frac{\cos x + i \sin x}{\cos x - i \sin x},$$

oder wenn wir Zähler und Nenner dieses Bruchs durch cos x dividiren,

$$e^{2xi} = \frac{1 + i \operatorname{tg} x}{1 - i \operatorname{tg} x}$$

also, wenn wir beiderseits die natürlichen Logarithmen nehmen,

$$2xi = \log \operatorname{nat}\left(\frac{1 + i \operatorname{tg} x}{1 - i \operatorname{tg} x}\right).$$

Entwickeln wir die rechte Seite dieser Gleichung nach der Formel (3) des §. 60, und dividiren wir dann beiderseits durch 2i, so ergibt sich

$$x = \operatorname{tg} x - \frac{1}{3} \operatorname{tg} x^3 + \frac{1}{5} \operatorname{tg} x^5 - \frac{1}{7} \operatorname{tg} x^7 + \ldots$$

eine Reihe, welche uns in den Stand setzt, zu einer trigonometrischen Tangente den zugehörigen Bogen zu berechnen, und die so lange convergirt, als $\operatorname{tg} x \lesseqgtr 1$, also $x \lesseqgtr \frac{1}{4}\pi$ ist.

---

*) Wenn man diese beiden Gleichungen quadrirt und addirt, so erhält man zur Summe 1 in Uebereinstimmung mit der bekannten trigonometrischen Gleichung

$$\sin x^2 + \cos x^2 = 1.$$

Eben so lassen sich mit Hilfe der obigen Gleichungen auch alle anderen Formeln der analytischen Trigonometrie (§. 26 u. f.) ohne Zuziehung irgend einer Figur beweisen.

§. 66. Zusatz.

Man kann sich dieser Reihe insbesondere zur Berechnung der Zahl π bedienen. So hat man z. B. für $x = \frac{1}{6}\pi$ (nach §. 38 der Trigonom.) $\operatorname{tg} \frac{1}{6}\pi = \sqrt{\frac{1}{3}}$, also

$$\frac{1}{6}\pi = \sqrt{\frac{1}{3}}\left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \ldots\right).$$

Eine viel schneller convergirende Reihe erhält man durch folgende Ueberlegung. Bezeichnet z denjenigen Werth von x, der $< \frac{1}{4}\pi$ ist, und für welchen die Tangente $= \frac{1}{5}$ wird, so daß also $\operatorname{tg} z = \frac{1}{5}$ ist, so ist (nach §. 32 der Trig.)

$$\operatorname{tg} 2z = \frac{2 \operatorname{tg} z}{1 - \operatorname{tg} z^2} = \frac{5}{12}$$

und

$$\operatorname{tg} 4z = \frac{2 \operatorname{tg} 2z}{1 - \operatorname{tg} 2z^2} = \frac{120}{119}.$$

Hiernach ist $4z > \frac{1}{4}\pi$, da $\operatorname{tg} \frac{1}{4}\pi = 1$ ist; weiter ist nun

$$\operatorname{tg}(4z - \tfrac{1}{4}\pi) = \frac{\operatorname{tg} 4z - 1}{1 + \operatorname{tg} 4z} = \frac{1}{239}.$$

Da nach der Annahme $\operatorname{tg} z = \frac{1}{5}$ ist, so folgt hieraus vermöge der Gleichung des vorherg. §.

$$z = \frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \frac{1}{7 \cdot 5^7} + \ldots,$$

und da $\operatorname{tg}(4z - \frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{239}$ ist,

$$4z - \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{5 \cdot 239^5} - \ldots$$

Verbindet man diese beiden Gleichungen mit einander, so ergibt sich

$$\pi = 4 \left\{ \begin{array}{l} 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \frac{1}{7 \cdot 5^7} + \ldots\right) \\ -\left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{5 \cdot 239^5} - \ldots\right). \end{array} \right.$$

Näherungsweise hat man hieraus

$$\pi = 3{,}141592653589793 \ldots$$

Dritter Abschnitt.

Von den complexen Zahlen.

§. 67. Erklärung.

Der Ausdruck

$$p + qi,$$

in welchem p und q reelle Zahlen sind, also sowohl positiv als negativ als auch gleich Null sein können, wird eine complexe Zahl genannt.

§. 68. Zusatz.

1) Die reelle Zahl ist hiernach ein specieller Fall der complexen Zahl $p + qi$, welcher aus dieser hervorgeht, wenn man $q = 0$ annimmt.

2) Sind zwei complexe Zahlen einander gleich

$$p + qi = p' + q'i,$$

so muß $p = p'$ und $qi = q'i$, also $q = q'$ sein, da eine reelle Zahl nur wieder einer reellen Zahl und ein imaginärer Ausdruck nur einem imaginären Ausdruck gleich sein kann.

§. 69. Lehrsatz.

Jede complexe Zahl

$$p + qi$$

läßt sich auf die Form

$$r(\cos t + i \sin t)$$

bringen, wo r irgend eine reelle Zahl und t die Maßzahl eines Kreisbogens bezeichnet.

Bew. Damit der Gleichung

$$p + qi = r(\cos t + i \sin t)$$

Genüge geschieht, muß sein

$$p = r \cos t \text{ und } q = r \sin t,$$

also $$p^2 + q^2 = r^2(\cos t^2 + \sin t^2) = r^2$$

und folglich $$r = \sqrt{p^2 + q^2}.$$

Nachdem nun r bestimmt ist, hat man noch den Bogen t so zu wählen, daß

$$\cos t = \frac{p}{r} \text{ und } \sin t = \frac{q}{r}$$

wird, was immer möglich ist, da $\frac{p}{r}$ und $\frac{q}{r}$ ächte Brüche sind und die Summe ihrer Quadrate

$$\frac{p^2}{r^2} + \frac{q^2}{r^2} = \frac{p^2 + q^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

ist. Man erhält aber den gesuchten Bogen t durch die Gleichung

$$\operatorname{tang} t = \frac{q}{p}.$$

Anm 1. Nimmt man $r = \sqrt{p^2 + q^2}$ als positiv an, und beschränkt man sich auf solche Bogen, welche kleiner als die ganze Peripherie sind, so wird man, wenn p und q gleiche Zeichen haben, t als in den ersten oder dritten Quadranten fallend anzunehmen haben, je nachdem p positiv oder negativ ist; wenn aber p und q ungleiche Zeichen haben, dann wird man t als in den zweiten oder vierten Quadranten fallend annehmen müssen, je nachdem p negativ oder positiv ist.

Anm. 2. Zufolge §. 64 hätten wir die obige Gleichung

$$p + qi = r \cos t + i \sin t$$

auch in der folgenden Form

$$p + qi = e^{ti}$$

schreiben können.

§. 70. Erklärung.

In der Verbindung

$$r\,(\cos t + i \sin t)$$

wird r der **Modulus** und $\cos t + i \sin t$ der **reducirte Ausdruck** genannt.

Da die aufgeführte Form für das Operiren mit complexen Zahlen in vielfacher Hinsicht Bequemlichkeit gewährt, und da nach dem vorherg. §. alle complexen Zahlen auf diese Form gebracht werden können, so wird man im Folgenden fast durchgehends annehmen, daß die in Betracht zu ziehenden complexen Zahlen bereits auf die obige Form gebracht sind.

§. 71. Zusatz.

Das **Multipliciren, Dividiren und Potenziren der complexen Zahlen** geschieht nach folgenden Formeln:

1) $r(\cos t + i \sin t) \,.\, \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta) = r\rho[\cos(t + \vartheta) + i \sin(t + \vartheta)]$

2) $\dfrac{r\,(\cos t + i \sin t)}{\rho\,(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)} = \dfrac{r}{\rho}\,[\cos(t - \vartheta) + i \sin(t - \vartheta)]$

3) $\dfrac{1}{\rho\,(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)} = \dfrac{1}{\rho}\,(\cos \vartheta - i \sin \vartheta)$

4) $[r(\cos t + i \sin t)]^m = r^m(\cos mt + i \sin mt)$ *),

wo jedoch angenommen ist, daß m eine ganze positive oder negative Zahl bedeutet.

Bew. Wenn man die linke Seite der Gleichung (1) entwickelt, so erhält man

$$r\,(\cos t + i \sin t) \,.\, \rho\,(\cos \vartheta + i \sin \vartheta) =$$
$$= r\rho\,[\cos t \cos \vartheta - \sin t \sin \vartheta + i\,(\cos t \sin \vartheta + \sin t \cos \vartheta)]$$
$$= r\rho\,[\cos(t + \vartheta) + i \sin(t + \vartheta)] \;^{**}).$$

Die Gleichung (2) folgt — nach dem bekannten Verfahren, wie alle Divisionsgleichungen erwiesen werden können, — äußerst leicht aus (1); — die Gleichung (3) ergibt sich aus (2), wenn man $t = 0$ und $r = 1$ setzt. Ferner geht (4), wenn (m) eine ganze Zahl ist, unmittelbar aus (1) hervor, indem man wiederholt $r(\cos t + i \sin t)$ mit sich selbst multiplicirt. Ist m negativ $= -n$, so ist

$$[r\,(\cos t + i \sin t)]^m = \frac{1}{[r\,(\cos t + i \sin t)]^n};$$

dieser Ausdruck ist zufolge des eben Gesagten, da n positiv ist,

$$= \frac{1}{r^n\,(\cos nt + i \sin nt)},$$

wofür wir vermöge (3) auch setzen können

$$\frac{1}{r^n}\,(\cos nt - i \sin nt).$$

Da nun $\dfrac{1}{r^n} = r^{-n} = r^m$,

ferner $\cos nt = \cos - nt = \cos mt$ und $- \sin nt = \sin - nt = \sin mt$ ist, so ist folglich auch, wenn m negativ ist,

$$[r\,(\cos t + i \sin t)]^m = r^m\,(\cos mt + i \sin mt).$$

---

*) Diese Gleichung ist zuerst von **Moivre** ums Jahr 1730 angegeben worden.
**) Trigonometrie §. 26.

Anm. Die Gleichung

$$(\cos t + i \sin t)^m = \cos mt + i \sin mt$$

läßt auch noch folgenden einfachen Beweis zu: Nach §. 64 ist

$$e^{xi} = \cos x + i \sin x,$$

also
$$e^{ti} = \cos t + i \sin t.$$

Potenziren wir beide Seiten dieser Gleichung mit m, so erhalten wir

$$e^{mti} = (\cos t + i \sin t)^m.$$

Nach §. 64 ist aber
$$e^{mti} = \cos mt + i \sin mt,$$

folglich
$$(\cos t + i \sin t)^m = \cos mt + i \sin mt.$$

§. 72. Zusatz.

Wenn in den Gleichungen

$$\cos mx + i \sin mx = (\cos x + i \sin x)^m$$

und
$$\cos mx - i \sin mx = (\cos x - i \sin x)^m$$

m eine ganze Zahl vorstellt und man die rechten Seiten derselben nach dem binomischen Lehrsatze entwickelt, dann addirt oder subtrahirt und mit 2 oder 2i dividirt, so erhält man

$$\cos mx = \cos x^m - \frac{m(m-1)}{1 \, . \, 2} \cos x^{m-2} \sin x^2$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \, . \, 2 \, . \, 3 \, . \, 4} \cos x^{m-4} \sin x^4 - \ldots$$

$$\sin mx = m \cos x^{m-1} \sin x - \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \, . \, 2 \, . \, 3} \cos x^{m-3} \sin x^3$$

$$+ \frac{m(m-1) \ldots (m-4)}{1 \, . \, 2 \ldots 5} \cos x^{m-5} \sin x^5 - \ldots$$

Diese Gleichungen lehren, den Sinus und Cosinus des Vielfachen eines Bogens durch den Sinus und Cosinus des einfachen Bogens auszudrücken.

§. 73. Erklärung.

Bezeichnet m eine positive ganze und a eine complexe Zahl, so soll im Folgenden unter

$$\sqrt[m]{a}$$

diejenige complexe Zahl verstanden werden, welche, mit m potenzirt, a gibt. — Was bisher in dem Falle, daß a eine absolute Zahl ist, unter $\sqrt[m]{a}$ verstanden worden, soll jetzt die absolute mte Wurzel aus a heißen. Es ist klar, daß diese ein besonderer Fall der eben erklärten allgemeinern $\sqrt[m]{a}$ ist.

§. 74. Aufgabe.

Die verschiedenen Werthe von $\sqrt[m]{1}$ darzustellen.

Aufl. Da jede complexe Zahl sich auf die in §. 69 angegebene Form bringen läßt, so setze man

$$\sqrt[m]{1} = \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta),$$

und man hat zur Bestimmung von ρ und ϑ die Gleichung

$$1 = [\rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)]^m$$

oder nach §. 71, (4)

$$1 = \rho^m (\cos m\vartheta + i \sin m\vartheta),$$

aus welcher

$$1 = \rho^m \cos m\vartheta \text{ und } \sin m\vartheta = 0$$

hervorgeht. Wenn $\sin m\vartheta = 0$ ist, so ist $\cos m\vartheta$ entweder $= +1$ oder $= -1$; weil aber ρ eine absolute Zahl bezeichnen soll und daher $\cos m\vartheta$ nicht $= -1$ sein darf, so ergibt sich

$$\rho = 1 \text{ und } \cos m\vartheta = 1,$$

also

$$m\vartheta = 2k\pi, \text{ d. h. } \vartheta = \frac{2k\pi}{m},$$

wo man statt k alle beliebigen ganzen positiven oder negativen Zahlen zu setzen hat. Demnach sind die verschiedenen Werthe von $\sqrt[m]{1}$ ausgedrückt durch die Formel

$$\sqrt[m]{1} = \cos\frac{2k\pi}{m} + i \sin\frac{2k\pi}{m}.$$

§. 75. Zusatz.

Wiewohl man in der vorstehenden Gleichung statt k unendlich viele verschiedene Zahlen setzen kann, so hat doch die $\sqrt[m]{1}$ nicht eben so viele verschiedene Werthe, indem sehr bald dieselben Werthe wiederkehren. Es liefern nämlich bekanntlich*) alle diejenigen positiven und negativen Werthe von k, welche sich um m oder ein Vielfaches der Zahl m von einander unterscheiden, einerlei Sinus und Cosinus und also auch gleiche Werthe für $\sqrt[m]{1}$. Man wird daher, um diese vollständig zu erhalten, statt k nur die Zahlen 0, 1, 2, ... m — 1 zu setzen brauchen, woraus denn hervorgeht, daß die $\sqrt[m]{1}$ nicht mehr als m verschiedene Werthe hat. Sie hat deren aber auch nicht weniger, indem die Ausdrücke

$$0, \frac{2\pi}{m}, \frac{4\pi}{m}, \frac{6\pi}{m}, \ldots \frac{(m-1)2\pi}{m}$$

sämmtlich $< 2\pi$ sind und daher keine zwei derselben sowohl im Sinus als auch im Cosinus übereinstimmen können.

Da ferner unter den imaginären Ausdrücken, wie man leicht sieht, sich gepaarte befinden werden, nämlich diejenigen, in welchen die Summe der Werthe von k gleich m ist, indem

$$\cos\frac{m-1}{m}.2\pi = \cos\frac{1}{m}.2\pi, \quad \sin\frac{m-1}{m}.2\pi = -\sin\frac{1}{m}.2\pi$$

$$\cos\frac{m-2}{m}.2\pi = \cos\frac{2}{m}.2\pi, \quad \sin\frac{m-2}{m}.2\pi = -\sin\frac{2}{m}.2\pi$$

u. s. f. ist, und da es überdies bequem ist, die gepaarten Ausdrücke zusammenzufassen, so kann man sämmtliche Werthe der $\sqrt[m]{1}$ durch die Formel

$$\cos\frac{2k\pi}{m} \pm i \sin\frac{2k\pi}{m}$$

darstellen, indem man sich darauf beschränkt, statt k solche Zahlen zu setzen, welche nicht größer als $\frac{m}{2}$ sind. Ist also m eine gerade Zahl, so wird man

*) Trigonometrie §. 12.

statt k die Zahlen 0, 1, 2 ... $\frac{m}{2}$, und wenn m ungerade ist, die Zahlen 0, 1, 2 ... $\frac{m-1}{2}$ zu setzen haben.

Ist m gerade, so befinden sich unter den m Werthen zwei reelle

$$+1 \text{ und } -1,$$

von denen der erste zu $k = 0$, der andere zu $k = \frac{m}{2}$ gehört, da in beiden Fällen $\sin\frac{2k\pi}{m} = 0$ und im ersten Falle $\cos\frac{2k\pi}{m} = \cos 0 = 1$, im andern $\cos\frac{2k\pi}{m} = \cos\pi = -1$ wird. Die übrigen $m-2$ Werthe sind imaginär.

Ist m eine ungerade Zahl, so hat $\sqrt[m]{1}$ nur den einzigen reellen Werth

$$+1$$

für $k = 0$, alle andern sind imaginär.

So sind z. B. die verschiedenen Werthe von $\sqrt[m]{1}$ für

$$m = 2 \ldots \begin{cases} \cos 0 = +1 \\ \cos\pi = -1 \end{cases}$$

$$m = 3 \ldots \begin{cases} \cos 0 = 1 \\ \cos\frac{2}{3}\pi \pm i\sin\frac{2}{3}\pi = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ (Trigon. §. 38)}$$

$$m = 4 \ldots \begin{cases} \cos 0 = +1 \\ \cos\frac{1}{2}\pi \pm i\sin\frac{1}{2}\pi = \pm i \\ \cos\pi \pm i\sin\pi = -1 \end{cases}$$

u. s. f.

§. 76. Aufgabe.

Die verschiedenen Werthe von

$$\sqrt[m]{-1}$$

darzustellen.

Aufl. Man setze

$$\sqrt[m]{-1} = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta),$$

so erhält man, wenn man beiderseits mit m potenzirt,

$$-1 = \rho^m(\cos m\vartheta + i\sin m\vartheta),$$

woraus denn $\quad \sin m\vartheta = 0, \ \cos m\vartheta = -1, \ \rho = 1,$

also $\quad m\vartheta = (2k+1)\pi$ und $\vartheta = \frac{2k+1}{m}.\pi$

hervorgeht, wo k wieder jede beliebige ganze positive oder negative Zahl vorstellt. Demnach sind die verschiedenen Werthe der $\sqrt[m]{-1}$ dargestellt durch die Formel

$$\sqrt[m]{-1} = \cos\frac{2k+1}{m}.\pi + i\sin\frac{2k+1}{m}.\pi.$$

§. 77. Zusatz.

Durch eine Ueberlegung, welche der in §. 75 ganz ähnlich ist, findet man, daß $\sqrt[m]{-1}$ nach der vorstehenden Formel m von einander verschiedene Werthe erhält, welche entstehen, wenn man statt k die positiven ganzen Zahlen 0, 1, 2 ... m — 1 setzt, daß ferner von diesen Werthen diejenigen gepaart sind, welche gleich weit vom Anfange und Ende abstehen, und für welche also die Summe der Werthe von k gleich m — 1 ist, weshalb diese m Werthe auch durch die Formel

$$\cos\frac{2k+1}{m}\,.\,\pi \pm i\sin\frac{2k+1}{m}\pi$$

dargestellt werden können, in welche man statt k nur solche Zahlen zu setzen hat, welche nicht größer sind, als $\frac{m}{2}$, also 0, 1, 2 ... $\frac{m}{2}$, wenn m eine gerade Zahl ist, und 0, 1, 2 ... $\frac{m-1}{2}$, wenn m ungerade ist. Ist m gerade, so sind sämmtliche m Ausdrücke imaginär, da für keinen Werth von k die ungerade Zahl 2k + 1 der geraden Zahl m gleich werden und daher niemals $\sin\frac{2k+1}{m}\pi = \sin\pi = 0$ werden kann. Ist m ungerade, so ist ein Werth von $\sqrt[m]{-1}$ reell und

$$= -1,$$

indem für $k = \frac{m-1}{2} \ldots \frac{2k+1}{m}\pi = \pi$ wird und $\cos\pi = -1$ und $\sin\pi = 0$ ist. Die übrigen m — 1 Resultate sind imaginär.

So sind z. B. die verschiedenen Werthe von $\sqrt[m]{-1}$ für

$$m = 2 \ldots \quad \cos\frac{1}{2}\pi \pm i\sin\frac{1}{2}\pi = \pm i$$

$$m = 3 \ldots \begin{cases} \cos\frac{1}{3}\pi \pm i\sin\frac{1}{3}\pi = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} \quad (\text{Trigon. §. 38.}) \\ \cos\pi \pm i\sin\pi = -1 \end{cases}$$

$$m = 4 \ldots \begin{cases} \cos\frac{1}{4}\pi \pm i\sin\frac{1}{4}\pi = \sqrt{\frac{1}{2}} \pm i\sqrt{\frac{1}{2}} \\ \cos\frac{3}{4}\pi \pm i\sin\frac{3}{4}\pi = -\sqrt{\frac{1}{2}} \pm i\sqrt{\frac{1}{2}} \text{ u. s. w.} \end{cases}$$

§. 78. Zusatz.

Ist a eine reelle Zahl, so werden die verschiedenen Werthe von $\sqrt[m]{+a}$ oder $\sqrt[m]{-a}$ erhalten, wenn man die absolute $\sqrt[m]{a}$ mit den verschiedenen Werthen von $\sqrt[m]{1}$ oder $\sqrt[m]{-1}$ multiplicirt.

Anm. Durch das Vorhergehende werden wir auch in den Stand gesetzt, die kubischen Gleichungen in dem sogenannten irreductiblen Falle nach der Cardanischen Formel aufzulösen. Zufolge der Anm. 1 zu §. 36 kann dieser Fall offenbar nur dann eintreten, wenn in der reducirten kubischen Gleichung der Coefficient (p) von x negativ ist.

Geben wir daher um größerer Bequemlichkeit willen der reducirten kubischen Gleichung die Form

$$x^3 - px + q = 0,$$

so werden wir, um die Formeln des §. 36 auf diese Annahme anzuwenden, an die Stelle des dortigen $+p$ hier $-p$ zu setzen haben. Demgemäß erhalten wir nach der Cardanischen Formel

$$1) \quad x = u + v,$$

wenn

$$2) \quad u = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3\right)}}$$

und

$$3) \quad v = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3\right)}}$$

angenommen wird, wobei jedoch, da jede Kubikwurzel drei verschiedene Werthe haben kann, die sich aus den Gleichungen (2) und (3) für u und v ergebenden je drei Werthe zufolge §. 36 in der Gleichung (1) so mit einander verbunden werden müssen, daß der Gleichung

$$4) \quad 3uv = \frac{1}{3}p$$

Genüge geschieht. — Um nun zunächst die aus der Gleichung hervorgehenden drei Werthe von u darzustellen, haben wir vor allen Dingen den Radicanden

$$-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3} = -\frac{1}{2}q + i\sqrt{\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}q^2}$$

in einen reducirten Ausdruck von der Form

$$r(\cos t + i \sin t)$$

zu verwandeln. Wir setzen dem zufolge

$$r \cos t = -\frac{1}{2}q \text{ und } r \sin t = \sqrt{\left(\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}q^2\right)}$$

und erhalten so $5) \quad r = \frac{p\sqrt{p}}{3\sqrt{3}}$ und $6) \quad \cos t = \frac{-q}{2r} = -\frac{3q\sqrt{3}}{2p\sqrt{p}}.$

Setzen wir ferner in der Gleichung (2) statt u den reducirten Ausdruck

$$\rho(\cos\vartheta + i \sin\vartheta),$$

so verwandelt sich dieselbe in

$$7) \quad \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) = \sqrt[3]{r(\cos t + i \sin t)},$$

wofür wir nach Gleichung (4) in §. 71 auch setzen können

$$\rho^3(\cos 3\vartheta + i \sin 3\vartheta) = r(\cos t + i \sin t).$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich

$$8) \quad \rho = \sqrt[3]{r} = \sqrt{\frac{p}{3}} \text{ und } 3\vartheta = 2k\pi + t,$$

also

$$9) \quad \vartheta = \frac{2k\pi + t}{3}.$$

Indem wir $k = 0$, ferner $= 1$ und endlich $= 2$ annehmen, erhalten wir für u die folgenden drei Werthe

$$10)\quad \begin{cases} u_1 = \left(\cos\frac{t}{3} + i\sin\frac{t}{3}\right)\sqrt{\frac{p}{3}}, \\ u_2 = \left[\cos\left(120^0 + \frac{t}{3}\right) + i\sin\left(120^0 + \frac{t}{3}\right)\right]\sqrt{\frac{p}{3}}, \\ u_3 = \left[\cos\left(240^0 + \frac{t}{3}\right) + i\sin\left(240^0 + \frac{t}{3}\right)\right]\sqrt{\frac{p}{3}}; \end{cases}$$

und vermöge der obigen Gleichung (4) und der Gleichung (3) in §. 71 sind die zugehörigen Werthe von v

$$11)\quad \begin{cases} v_1 = \left(\cos\frac{t}{3} - i\sin\frac{t}{3}\right)\sqrt{\frac{p}{3}}, \\ v_2 = \left[\cos\left(120^0 + \frac{t}{3}\right) - i\sin\left(120^0 + \frac{t}{3}\right)\right]\sqrt{\frac{p}{3}}, \\ v_3 = \left[\cos\left(240^0 + \frac{t}{3}\right) - i\sin\left(240^0 + \frac{t}{3}\right)\right]\sqrt{\frac{p}{3}}. \end{cases}$$

Setzen wir $t = 90^0 + \alpha,$

so ist $\cos t = -\sin\alpha$ und folglich vermöge der Gleichung (6)

$$12)\quad \sin\alpha = \frac{3q\sqrt{3}}{2p\sqrt{p}}.$$

Wenn wir nun die in (10) und (11) für u und v erhaltenen Werthe in die Gleichung (1) substituiren und zugleich überall $\frac{t}{3}$ durch $30^0 + \frac{\alpha}{3}$ ersetzen, so bekommen wir endlich für x die drei Werthe

$$13)\quad \begin{cases} x_1 = 2\cos\left(30^0 + \frac{1}{3}\alpha\right)\sqrt{\frac{p}{3}} = 2\sin\left(60^0 - \frac{1}{3}\alpha\right)\sqrt{\frac{p}{3}} \\ x_2 = 2\cos\left(150^0 + \frac{1}{3}\alpha\right)\sqrt{\frac{p}{3}} = -2\sin\left(60^0 + \frac{1}{3}\alpha\right)\sqrt{\frac{p}{3}} \\ x_3 = 2\cos\left(270^0 + \frac{1}{3}\alpha\right)\sqrt{\frac{p}{3}} = 2\sin\frac{1}{3}\alpha\sqrt{\frac{p}{3}}. \end{cases}$$

Diese unter (12) und (13) aufgeführten Auflösungen sind aber genau dieselben, welche wir in der Anm. 2 zu §. 36 durch trigonometrische Umformung (ohne Benutzung complexer Zahlen) erhalten haben.

Die hier ausgeführte Entwicklung zeigt zugleich an einem Beispiele, wie die dritte Wurzel aus einer complexen Zahl nach ihren verschiedenen Werthen darzustellen ist. Wir beschränken uns auf diesen einen Fall, da andere Wurzeln aus complexen Zahlen kaum irgend Anwendung finden und überdies in ganz ähnlicher Art erhalten werden können.

Anhang

zum ersten Abschnitte des ersten Kapitels.

Die ersten Bogen dieses Buches waren bereits gedruckt, als dem Verfasser die folgenden interessanten Aufgaben begegnet sind, welche hier nachträglich angereiht werden.

Aufgabe 45. In einen Kreis, dessen Radius ($= r$) gegeben ist, das Trapez vom größten Inhalte ($BB'D'D$, Fig. 9) zu zeichnen, wenn der Winkel (BAB'), unter welchem sich die Verlängerungen der nicht parallelen Seiten schneiden, ($= 2\alpha$) gegeben ist.

Aufl. Aus der Aufgabe erhalten wir zunächst die Gleichung

$$1)\quad \triangle\, ABB' - ADD' = \text{Maximum}.$$

Ziehen wir die Radien BC und CD und die zu BD Senkrechte CE, und setzen wir der Kürze wegen $AE = u$, $BE = DE = v$, so verwandelt sich die vorstehende Gleichung in $\frac{1}{2}(u + v)^2 \sin 2\alpha - \frac{1}{2}(u - v)^2 \sin 2\alpha = \text{Maximum}$

oder $$2)\quad 2uv \sin 2\alpha = \text{Maximum},$$

wofür wir auch kürzer setzen können

$$3)\quad uv = \text{Maximum}.$$

Nun ist aber

$$4)\quad u = EC \operatorname{cotg} \alpha = \sqrt{r^2 - v^2} \,.\, \operatorname{cotg} \alpha.$$

Hiernach geht die vorhergehende Gleichung über in

$$5)\quad v \,.\, \sqrt{r^2 - v^2} \,.\, \operatorname{cotg} \alpha = \text{Maximum},$$

also auch $$6)\quad r^2v^2 - v^4 = \text{Maximum}.$$

Die Auflösung dieser Gleichung ergibt

$$7)\quad v' = r\sqrt{\tfrac{1}{2}}.$$

Die Seite des größten in den Kreis zu zeichnenden Trapezes ist also allemal gleich der Seite des Quadrates im Kreise, welchen Werth auch immer der Winkel α haben mag. Man erhält daher dieses größte Trapez mit dem gegebenen Scheitelwinkel 2α, wenn man um den Mittelpunkt des gegebenen Kreises mit der halben Seite des Quadrates in demselben einen Kreis beschreibt, an diesen Kreis zwei sich unter dem Winkel 2α schneidende Tangenten zieht und die homologen Durchschnittspunkte dieser Tangenten mit dem gegebenen Kreise unter sich verbindet.

Zufolge Gleichung (7) ist für das größte Trapez im Kreise $v' = r\sqrt{\frac{1}{2}}$ und folglich vermöge Gleichung (4) $u' = r \,.\, \sqrt{\frac{1}{2}} \,.\, \operatorname{cotg} \alpha$. Setzen wir diese Werthe in die Gleichung (2), so erhalten wir den Inhalt des größten Trapezes

$$8)\quad J = r^2 \operatorname{cogt} \alpha \sin 2\alpha = 2r^2 \cos \alpha^2.$$

Dieses Trapez fällt also um so größer aus, je kleiner der Winkel α ist, und für $\alpha = 0$, d. h. wenn das in den Kreis zu zeichnende größte Trapez ein Rechteck sein soll, wird dasselbe dem Quadrate im Kreise gleich.

Damit aber dieses Trapez wirklich zu Stande kommt, ist erforderlich, daß der Durchschnittspunkt A außerhalb des Kreises fällt, daß also

$$AC = \frac{u}{\cos \alpha} > r$$

ist. Es war für das größte Trapez $u' = r \, . \sqrt{\tfrac{1}{2}} \, . \operatorname{cotg} \alpha$; es muß daher

$$r\sqrt{\tfrac{1}{2}} \, . \operatorname{cotg} \alpha > r \cos \alpha,$$

also $\sin \alpha < \sqrt{\tfrac{1}{2}}$, d. h. $\alpha < 45$ und $2\alpha < 90^0$ sein. Unsere Aufgabe ist daher, wörtlich genommen, nur dann zu lösen, wenn der Winkel, unter welchem die verlängerten nicht parallelen Seiten des Trapezes zusammenstoßen, ein spitzer ist. Entgegengesetzten Falles, wenn dieser Winkel ein rechter oder stumpfer ist, existirt das gesuchte Maximum nicht; das Trapez fällt vielmehr um so größer aus, je mehr sich der Durchschnittspunkt A der Peripherie nähert, und es wird am größten, geht aber in ein Dreieck über, wenn dieser Punkt auf die Peripherie fällt.

Die behandelte Aufgabe ist jedoch nur ein specieller Fall der folgenden allgemeinern Aufgabe:

In der Ebene eines Kreises, dessen Radius (= r) gegeben ist, einen Punkt (A) so zu bestimmen, daß, wenn man denselben mit dem Mittelpunkte (C) verbindet, an die Verbindungslinie zu beiden Seiten in dem gesuchten Punkte (A) einen vorgeschriebenen Winkel (α) anlegt und die homologen Durchschnittspunkte, in denen die freien Schenkel dieser Winkel den Kreis durchschneiden, mit einander (B mit B′ und D mit D′) verbindet, der Unterschied der entstandenen Dreiecke (ABB′ — ADD′) am größten wird.

Bei dieser Aufgabe sind natürlich zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem der gesuchte Punkt A außerhalb oder innerhalb des Kreises angenommen wird. Der erstere Fall ist bereits im Vorhergehenden erledigt worden; für den andern Fall erhalten wir nach Fig. 10 die Gleichung

$$\triangle \; ABB' - ADD' = \text{Maximum},$$

oder wenn wir eben so wie im Vorhergehenden AE = u und BE = DE = v setzen,

$$\tfrac{1}{2}(v + u)^2 \sin 2\alpha - \tfrac{1}{2}(v - u)^2 \sin 2\alpha = \text{Maximum},$$

wofür wir noch kürzer setzen können

$$uv = \text{Maximum}.$$

Da hier ebenfalls $u = EC \operatorname{cotg} \alpha = \sqrt{r^2 - v^2} \, . \operatorname{cotg} \alpha$ ist, so ergibt sich aus der zuletzt erhaltenen Gleichung, wenn wir quadriren,

$$r^2v^2 - v^4 = \text{Maximum}.$$

Wir erhalten also für den zweiten Theil der Aufgabe genau dieselbe Gleichung wie für den ersten, und das Maximum tritt folglich auch bei dem zweiten Theile, also überhaupt bei der allgemeiner gefaßten Aufgabe dann ein, wenn der Punkt A so angenommen wird, daß die Sehne BD gleich der Seite des Quadrates im Kreise ist.

Aufgabe 46. In eine Kugel, deren Radius (= 2r) gegeben ist, den abgekürzten Kegel vom größten Mantel zu construiren, wenn der Scheitelwinkel des vollständigen Kegels (der Winkel, unter welchem zwei gegenüberstehende Seitenlinien zusammenstoßen, = 2α) gegeben ist.

Die Auflösung wird in ganz ähnlicher Art wie bei der vorhergehenden Aufgabe gewonnen.

Aufgabe 47. In eine Kugel, deren Radius ($= r$) gegeben ist, den abgekürzten Kegel vom größten Volumen zu construiren, wenn der Scheitelwinkel des vollständigen Kegels ($= 2\alpha$) gegeben ist.

Aufl. Es sei C, Fig. 9, der Mittelpunkt der Kugel, BB′ der Durchmesser der untern, DD′ der Durchmesser der obern Grundfläche des abgekürzten und A die Spitze des vollständigen Kegels; dann erhalten wir, wenn wir wie in der 46. Aufgabe $AE = u$, $BE = DE = v$, das Volumen des abgekürzten Kegels aber $= V$ setzen, die Gleichung

$$1)\ V = \frac{\pi}{3}(u+v)^3 \sin\alpha^2 \cos\alpha - \frac{\pi}{3}(u-v)^3 \sin\alpha^2 \cos\alpha$$

oder nach einiger Reduction

$$2)\ V = \frac{2\pi v}{3}(3u^2 + v^2) \sin\alpha^2 \cos\alpha.$$

Setzen wir in dieser Gleichung $u^2 = (r^2 - v^2)\operatorname{cotg}\alpha^2$, so bekommen wir weiter

$$3)\ V = \frac{2\pi v}{3}[3r^2 - v^2(3 - \operatorname{tang}\alpha^2)] \cos\alpha^3$$

und hieraus zufolge der Aufgabe

$$4)\ 3r^2v - v^3(3 - \operatorname{tang}\alpha^2) = \text{Maximum}.$$

Hiernach kann ein Maximum offenbar nur dann eintreten, wenn $\operatorname{tang}\alpha < \sqrt{3}$, folglich $\alpha < 60^0$ und $2\alpha < 120^0$ ist; d. h. der Scheitelwinkel des ganzen Kegels muß kleiner als der Winkel des regelmäßigen Sechsecks sein. Dies vorausgesetzt, ergibt sich aus der Gleichung (4)

$$5)\ v' = \frac{r}{\sqrt{(3 - \operatorname{tang}\alpha^2)}}.$$

Bezeichnen wir das Volumen des größten abgekürzten Kegels mit V′, so erhalten wir vermöge der Gleichung (3)

$$6)\ V' = \frac{4r^3\pi \cos\alpha^3}{3\sqrt{(3 - \operatorname{tang}\alpha^2)}}.$$

Das Volumen des größten in die gegebene Kugel zu construirenden abgekürzten Kegels fällt hiernach um so größer aus, je kleiner der Winkel α ist. Lassen wir α bis zum Verschwinden abnehmen, so geht der abgekürzte Kegel in einen Cylinder über und sein Volumen wird dann

$$V' = \frac{4r^3\pi}{3\sqrt{3}},$$

übereinstimmend mit der Aufgabe (21), in welcher wir den Radius des größten in die Kugel zu construirenden Cylinders $x' = r\sqrt{\frac{2}{3}}$ und die Höhe $y' = 2r\sqrt{\frac{1}{3}}$ fanden, woraus sich ebenfalls für das Volumen dieses Cylinders $(x'^2y'\pi)$ der eben erhaltene Werth ergibt.

Soll aber der größte abgekürzte Kegel, dessen Volumen wir in Gleichung (6) berechnet haben, in der Kugel wirklich existiren, so muß die Spitze des vollständigen Kegels außerhalb der Kugel zu liegen kommen, also $AC > r$ sein. Nun ist aber

$$AC = \frac{EC}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{r^2 - v'^2}}{\sin\alpha};$$

es muß folglich

$$r^2 - v'^2 > r^2 \sin\alpha^2, \text{ also } r^2 \cos\alpha^2 > v'^2$$

sein, woraus, wenn wir den Werth von v′ aus Gleichung (5) einsetzen,

$$\cos \alpha > \sqrt{\tfrac{1}{2}}, \text{ also } \alpha < 45^0 \text{ und } 2\alpha < 90^0$$

hervorgeht. Der Scheitelwinkel α des vollständigen Kegels muß demnach kleiner als ein rechter sein, wenn der berechnete größte Kegelstumpf in der Kugel wirklich zu Stande kommen soll.

Unsere Aufgabe ist indessen nur ein specieller Fall einer allgemeinern Aufgabe, welche sich in folgender Art aussprechen läßt.

Auf der Axe einer Kegelfläche, deren Scheitelwinkel ($= 2\alpha$) gegeben ist, den Mittelpunkt einer die Kegelfläche durchschneidenden Kugelfläche, deren Radius ($=$ r) gegeben ist, so anzunehmen, daß das Volumen des Körpers (abgekürzten Kegels oder Doppelkegels), welcher von der Kegelfläche und den Ebenen der Kreise eingeschlossen ist, in denen die Kugelfläche die Kegelfläche durchschneidet, am größten wird.

Bei dieser Aufgabe sind offenbar zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem der Scheitel der Kegelfläche außerhalb der Kugel zu liegen kommt oder nicht. Den ersten Fall haben wir im Vorhergehenden behandelt; für den andern Fall, wenn der Scheitel der Kegelfläche innerhalb der Kugel fällt, erhalten wir nach Fig. 10, wenn wir AE $=$ u, BE $=$ DE $=$ v und das Volumen des Doppelkegels $=$ V setzen, für das Volumen des größten Doppelkegels die Gleichung

$$*1)\quad V = \frac{\pi}{3}(v + u)^3 \sin \alpha^2 \cos \alpha + \frac{\pi}{3}(v - u)^3 \sin \alpha^2 \cos \alpha = \text{Maximum},$$

oder

$$*2)\quad V = \frac{2\pi v}{3}(v^2 + 3u^2) \sin \alpha^2 \cos \alpha,$$

oder da $u^2 = (r^2 - v^2) \operatorname{cotg} \alpha^2$ ist,

$$*3)\quad V = \frac{2\pi v}{3}[3r^2 - v^2(3 - \operatorname{tang} \alpha^2)] \cos \alpha^3,$$

also gerade dieselbe Gleichung, welche wir für den ersten Theil der Aufgabe unter (3) erhalten haben, wonach denn auch die weitere Discussion des zweiten Theiles mit der des ersten zusammenfällt und folglich auch für die allgemeiner gefaßte Aufgabe die Gleichung (4) denjenigen Werth von V anzeigt, für welchen das Volumen des in Rede stehenden Körpers am größten wird und die Gleichung (6) dieses größte Volumen V angibt. Der in die Kugel zu construirende Körper ist aber, wie schon oben angegeben, ein abgekürzter Kegel, ein vollständiger Kegel oder ein Doppelkegel, je nachdem der Scheitelwinkel 2α ein spitzer, ein rechter oder ein stumpfer ist, in dem letzten Falle jedoch vorausgesetzt, daß der Scheitelwinkel $2\alpha < 120^0$ ist. Denn wenn wir der unter Nr. 3 und *3 aufgeführten Gleichung die Form

$$V = \frac{2\pi v}{3}(3r^2 + v^2(\operatorname{tang} \alpha^2 - 3)) \cos \alpha^3$$

geben, so erkennt man sofort, daß dieselbe für V kein Maximum liefern kann, wenn $\operatorname{tang} \alpha \geqq \sqrt{3}$ ist. Vielmehr wächst dann V zugleich und ununterbrochen mit v; für $v = 0$ verschwindet auch V, und für $v = \infty$ wird auch V unendlich groß. Allein dem Wachsen von v und also auch von V ist von anderer Seite eine Grenze gesetzt, indem die halbe Sehne v offenbar nicht größer als der Kugelradius r werden kann. Der Doppelkegel erreicht daher sein größtes Volumen, wenn die Sehne 2v dem Durchmesser 2r gleich wird, d. h. wenn der Scheitel in den Mittelpunkt fällt. Dieses größte Volumen ist aber

$$V'' = \frac{2}{3}\pi r^3 \sin \alpha^2 \cos \alpha;$$

und für den besonderen Fall, daß der Scheitelwinkel $2\alpha = 120^0$ ist, ist

$$V'' = \tfrac{1}{4}\pi r^3.$$

Fassen wir die im Vorhergehenden gewonnenen Bestimmungen noch einmal übersichtlich zusammen, so ergeben sich folgende Resultate: Der in der angegebenen Weise zu construirende Körper vom größten Volumen ist ein abgekürzter Kegel, und sein Scheitel kommt außerhalb der Kugel zu liegen, wenn der Scheitelwinkel $2\alpha < 90^0$ ist; die Gleichung (5) aber dient zur genaueren Bestimmung der Lage des Scheitels A; der Körper vom größten Volumen ist ein vollständiger Kegel, und sein Scheitel fällt auf die Kugel, wenn der Scheitelwinkel $2\alpha = 90^0$ ist; derselbe ist ein Doppelkegel, und sein Scheitel fällt in die Kugel, wenn der Scheitelwinkel $2\alpha > 90^0$, aber $< 120^0$ ist; die Gleichung (5) aber gibt die Abhängigkeit der Lage des Scheitels von der Größe des Winkels α an; der fragliche Körper ist ebenfalls ein Doppelkegel, und sein Scheitel fällt in den Mittelpunkt der Kugel, wenn der Scheitelwinkel $2\alpha =$ oder $> 120^0$ ist, welches auch immer der besondere Werth dieses Winkels sein mag.

Aufgabe 48. Wie muß auf dem einen Schenkel eines rechten Winkels ein Punkt (X, Fig. 11) angenommen werden, damit ein bestimmter Theil (BC) des andern Schenkels unter dem größten Gesichtswinkel erscheine?

Aufl. Die Aufgabe liefert uns die Gleichung

$$1)\quad W.\ CXB = \text{Maximum}.$$

Setzen wir $AB = a$, $BC = b$ und $AX = x$, so ist

$$\text{cotg}\ CXB = \text{cotg}\ (CXA - BXA) = \frac{\text{cotg}\ CXA\ \text{cotg}\ BXA + 1}{\text{cotg}\ BXA - \text{cotg}\ CXA}$$

$$= \frac{\frac{x}{a}\cdot\frac{x}{a+b} + 1}{\frac{x}{a} - \frac{x}{a+b}} = \frac{x^2 + a(a+b)}{bx}.$$

Da der Winkel CXB jedenfalls ein spitzer ist, so wird derselbe dann am größten, wenn seine Cotangente am kleinsten ist; wir können daher die Gleichung (1) auch umsetzen in

$$\frac{x^2 + a(a+b)}{bx} = \text{Minimum},$$

oder wenn wir mit b multipliciren,

$$x + \frac{a(a+b)}{x} = \text{Minimum},$$

woraus

$$x' = \sqrt{a(a+b)}$$

hervorgeht. Der gesuchte Abstand ist demnach allemal größer als a, aber hiervon um so weniger verschieden, je kleiner b ist. Ist b im Vergleich zu a sehr klein, so werden wir ohne erheblichen Fehler

$$x' = a$$

setzen können. Um also eine auf einer senkrechten Wand in der Höhe angebrachte Inschrift am deutlichsten zu erkennen, werden wir uns so aufstellen müssen, daß der wagrechte Abstand des Auges von der Wand gleich der senkrechten Höhe der Schrift über dem Auge ist.

Aufgabe 49. Auf einer geraden Linie bewegt sich ein Punkt mit gleichförmiger Geschwindigkeit; wann wird dieser Punkt einem gegebenen festen Punkte am nächsten kommen?

Aufl. Es seien für irgend einen Zeitpunkt a und b die rechtwinkligen Coordinaten des beweglichen Punktes, ferner c und d diejenigen Größen, um welche sich dieselben in der Zeiteinheit ändern; dann sind diese Coordinaten nach x Zeiteinheiten gleich $a + cx$ und $b + dx$. Bezeichnen wir nun noch den Abstand, welchen die beiden Punkte dann von einander haben, mit z und die unveränderlichen Coordinaten des festen Punktes mit a′ und b′, so ist

$$z^2 = (a' - a - cx)^2 + (b' - b - dx)^2 \text{*)}$$

oder wenn wir um abzukürzen $a' - a = \alpha$ und $b' - b = \beta$ setzen,

$$1) \quad z^2 = (\alpha - cx)^2 + (\beta - dx)^2$$

oder

$$2) \quad z^2 = \alpha^2 + \beta^2 - x(2\alpha c + 2\beta d - (c^2 + d^2)x).$$

Dieser unter allen Umständen positive Ausdruck wird offenbar dann am kleinsten, wenn das Glied

$$x(2\alpha c + 2\beta d - (c^2 + d^2)x)$$

positiv und am größten ist. Wir erhalten daher, wenn wir durch $c^2 + d^2$ dividiren, die Gleichung

$$3) \quad \frac{2(\alpha c + \beta d)x}{c^2 + d^2} - x^2 = \text{Maximum},$$

woraus

$$4) \quad x' = \frac{\alpha c + \beta d}{c^2 + d^2}$$

hervorgeht. Indem wir diesen Werth in die Gleichung (2) einsetzen, ergibt sich der kleinste Abstand beider Punkte von einander

$$5) \quad z' = \frac{\pm(\alpha d - \beta c)}{\sqrt{(c^2 + d^2)}}.$$

Sollen die beiden Punkte zusammentreffen, also z′ verschwinden, so muß sich verhalten

$$\alpha : \beta = c : d.$$

Wie leicht zu sehen, geht dann die gerade Linie, auf welcher der bewegliche Punkt fortrückt, durch den festen Punkt.

Die behandelte Aufgabe findet nützliche Anwendung, um die Zeit und die Größe des kleinsten Abstandes eines Planeten von irgend einem in der Nähe desselben befindlichen Fixsterne zu berechnen, indem für kurze Strecken mit selteneren Ausnahmen die scheinbaren Bahnen der Planeten am Himmel als geradlinig angenommen werden können.

Aufgabe 50. Auf zwei gegebenen geraden Linien bewegen sich zwei Punkte mit gleichförmigen Geschwindigkeiten; wann kommen dieselben einander am nächsten?

Aufl. Bezeichnen wir für irgend einen Zeitpunkt die Abscisse und Ordinate für den einen Punkt mit a und b, für den andern mit a′ und b′, ferner die Aenderungen, welche Abscisse und Ordinate in der Zeiteinheit erfahren, für jenen mit c und d, für diesen mit c′ und d′, endlich den gegenseitigen Abstand der beiden Punkte x Zeiteinheiten nach dem angenommenen Zeitpunkte mit z, so ist

$$z^2 = (a - a' - (c' - c)x)^2 + (b - b' - (d' - d)x)^2 \text{**)},$$

oder wenn wir um abzukürzen $a - a' = \alpha$, $b - b' = \beta$, $c' - c = \gamma$ und $d' - d = \delta$ setzen,

---

*) Anfangsgründe der analytischen Geometrie und der Lehre von den Kegelschnitten. Essen, 1868. § 11.

**) Wenn $a > a'$ und $b > b'$ ist, so darf nicht $c > c'$ und $d > d'$ sein, wenn sich die beiden Punkte einander nähern sollen.

$$z^2 = (\alpha - \gamma x)^2 + (\beta - \delta x)^2,$$

woraus sich in ähnlicher Art wie bei der vorhergehende Aufgabe

$$x' = \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\gamma^2 + \delta^2} \text{ und } z' = \pm \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\sqrt{(\gamma^2 + \delta^2)}}$$

ergibt. Wir erhalten ferner eben so wie dort als Bedingung des Zusammentreffens der beiden Punkte die Proportion

$$\alpha : \beta = \gamma : \delta.$$

Diese Aufgabe, von welcher die vorhergehende offenbar ein specieller Fall ist, kann dazu dienen, um die Zeit, wann zwei Planeten einander am Himmel am nächsten kommen, und die Größe des kleinsten Abstandes zu berechnen.

Aufgabe 51. In welchem Abstande vom Schwerpunkte muß bei einem Pendel, welches aus einem gleichförmigen Stabe besteht, der Aufhängepunkt angebracht werden, wenn das Pendel am rascheſten schwingen soll?

Aufl. Die Physik lehrt (Anfangsgr. der Physik §. 40, a.), daß bei einem Pendel, welches aus einem gleichförmigen Stabe besteht, das Product aus den Abständen des Aufhängepunktes und des Schwingungspunktes vom Schwerpunkte gleich ist dem Produkte aus dem dritten und dem vierten Theile der Länge des Stabes. Bezeichnen wir daher die Länge des Stabes mit a, den Abstand des Aufhängepunktes vom Schwerpunkte mit x und den Abstand des Schwingungspunktes vom Schwerpunkte mit y, so ist

$$1) \quad xy = \frac{1}{12} a^2.$$

Da bei jedem Pendel der Schwerpunkt zwischen dem Aufhängepunkte und dem Schwingungspunkte liegt, so ist die reducirte Länge des Pendels, (der Abstand des Schwingungspunktes vom Aufhängepunkte),

$$l = x + y,$$

und da ferner ein Pendel um so rascher schwingt, je kleiner diese Länge ist, so erhalten wir die Gleichung

$$2) \quad x + y = \text{Minimum},$$

oder wenn wir den Werth von y aus Gleichung (1) einsetzen,

$$3) \quad x + \frac{a^2 : 12}{x} = \text{Minimum},$$

also

$$x' = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{6} a\sqrt{3} = a \,.\, 0{,}2887.$$

Construiren wir ein gleichseitiges Dreieck, welches $\frac{1}{2}$a zur Höhe hat, so ist die halbe Grundlinie dieses Dreiecks = x'. Vermöge Gleichung (1) ist

$$y' = \frac{1}{12} a^2 : x' = \frac{a}{2\sqrt{3}} = x';$$

es haben daher, wenn der Stab am rascheſten schwingt, der Aufhängepunkt und der Schwingungspunkt gleichen Abstand vom Schwerpunkte und die reducirte Länge dieses Pendels ist gleich

$$2x' = \frac{1}{3} a\sqrt{3} = a \,.\, 0{,}5774.$$

Wird der Abstand x des Aufhängepunktes vom Schwerpunkte vergrößert oder verkleinert, so schwingt in beiden Fällen das Pendel langsamer, und es schwingt unendlich langsam, (es schwingt gar nicht mehr), wenn der Abstand des Aufhängepunktes vom Schwerpunkte unendlich klein oder unendlich groß ist.

Was wir hier über ein aus einem gleichförmigen Stabe bestehendes Pendel entwickelt haben, läßt sich auch leicht auf jedes andere Pendel übertragen, wenn von demselben die Masse und das Trägheitsmoment für den Fall bekannt ist, daß die Drehungsaxe durch den Schwerpunkt geht, da dieses Moment gleich ist dem Producte aus der Masse und den Abständen des Schwingungs- und des Aufhängepunktes vom Schwerpunkte. Sind diese Abstände einander gleich, so schwingt das Pendel am rascheſten.

Inhalt.

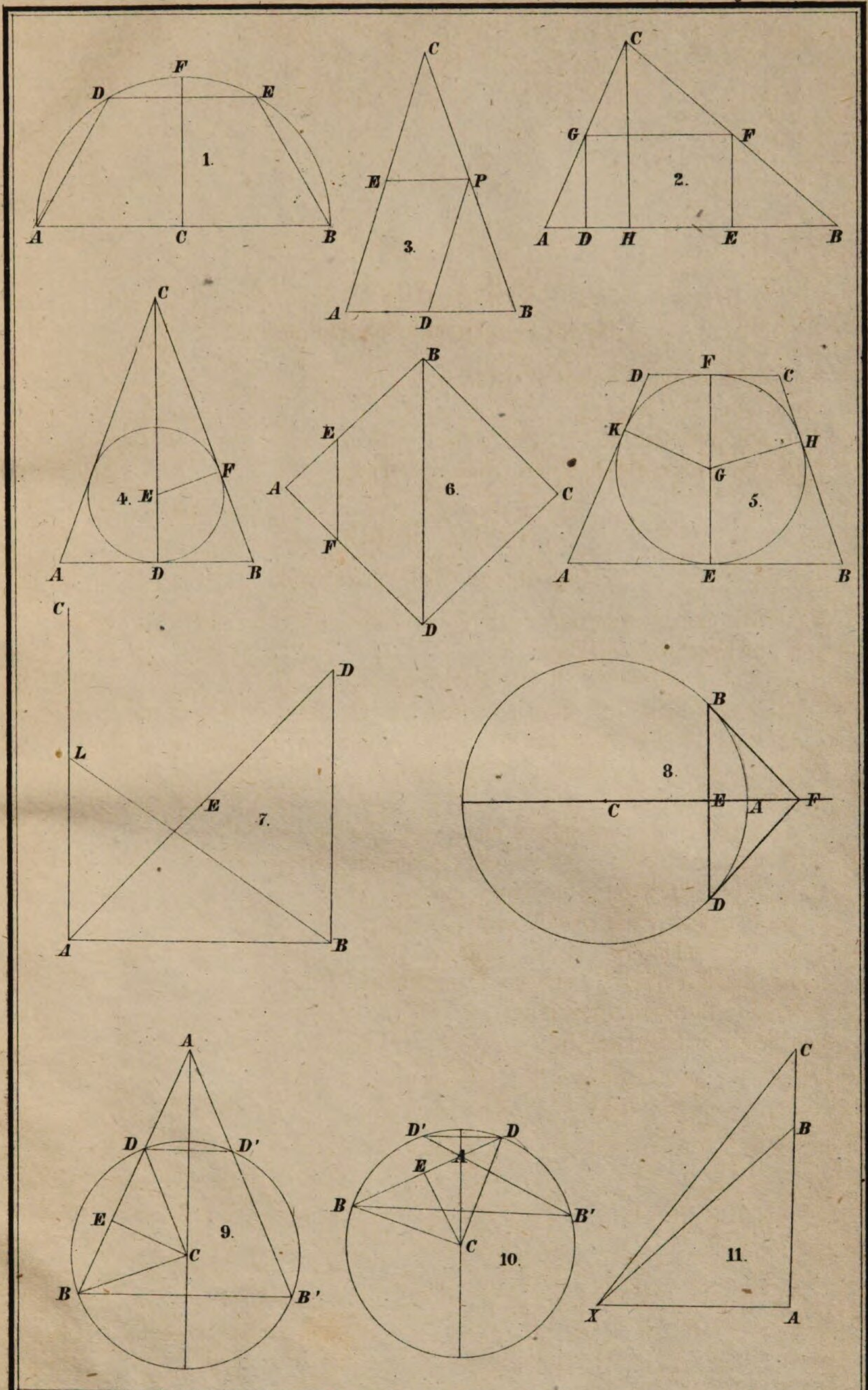
Erstes Kapitel.

Ergänzungen zur Arithmetik.

Zweites Kapitel.

Die algebraische Analysis.

Druck von G. D. Bädeker in Essen


1.
D F E
A C B
3.
C
E P
A D B
2.
C
G F
A D H E B
4.
C
E F
A D B
6.
B
E
A C
F
D
5.
D F C
K H
G
A E B
7.
C
L
D
E
A B
8.
B
C E A F
D
9.
A
D D'
E
C
B B'
10.
D' D
E A
B B'
C
11.
C
B
X A